KTH Teknikvetenskap

**SF1625 Envariabelanalys**
**Tentamen**
**Torsdagen den 15:e december, 2011**

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1–2 eller period 2 (ej period 1), 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | – | – | – | – |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

---

## DEL A

1. Radien på en cirkel ökar med den konstanta hastigheten $3$ cm/s. Hur snabbt ändras cirkelns area vid den tidpunkten då radien är $10$ cm?

2. Beräkna integralen
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\, dx.$$

3. Beräkna längden av kurvan $y = 2 - 2x\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$.

---

## DEL B

4. Låt
$$f(x) = \frac{x^2 + 3|x|}{x - 2}.$$
   (a) Ange alla lokala maximi- och minimipunkter. **(2 p)**
   (b) Bestäm samtliga asymptoter till $f$. Rita även kurvan $y = f(x)$. **(2 p)**

5. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen **(2 p)**
$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 4x.$$
   (b) Verifiera, genom insättning i ekvationen, att svaret du fick i (a) verkligen uppfyller ekvationen. **(1 p)**
   (c) Vilka värden på begynnelsevillkoret $y'(0)$ ger en lösning $y(x)$ så att $y(0) = 0$ och **(1 p)**
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = -2?$$

6. Använd Taylors formel på lämpligt sätt för att bestämma ett närmevärde på integralen
$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$
med ett fel som högst är $1/4$.

---

## DEL C

7. Låt
$$S = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}.$$
   (a) Visa att $S$ är konvergent. **(2 p)**
   (b) Visa att $S \leq 1$. **(2 p)**

8. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Definiera vad som menas med att $f$ är kontinuerlig i punkten $x_0$. **(1 p)**
   (b) Definiera vad som menas med att $f$ är deriverbar i punkten $x_0$. **(1 p)**
   (c) Visa att om $f$ är deriverbar i punkten $x_0$ så är den även kontinuerlig i punkten $x_0$. **(2 p)**

9. En 2 meter lång cylindrisk stång med radie $0.1$ meter är gjord i ett material med variabel densitet. Densiteten $\rho$ varierar med avståndet till ena änden av stången enligt formeln
$$\rho(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{4} \text{ kg/m}^3,$$
där $x \in [0, 2]$ alltså är avståndet till ena änden av stången. För att beräkna stångens massa kan man tänka så att man delar in stången i mindre bitar och räknar på massan av varje sådan liten bit och till slut summerar. Om vi tänker oss att stången är placerad längs $x$-axeln med den ena ändpunkten i $0$ och den andra i $2$ så kan vi dela in stången i $n$ stycken mindre bitar genom välja $x$-punkter så att
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = 2.$$
Avståndet mellan punkt $x_{j-1}$ och $x_j$ kallar vi $\Delta x_j$. Massan av den del av stången som ligger mellan dessa punkter är nu approximativt
$$\rho(x_j) \cdot 0.1^2 \pi \Delta x_j \text{ kg}$$
och hela massan fås genom summation till approximativt
$$\sum_{j=1}^{n} \rho(x_j) \cdot 0.1^2 \pi \Delta x_j \text{ kg}.$$
Om indelningen görs obegränsat fin (dvs om vi låter $n \to \infty$ på ett sådant sätt att alla $\Delta x_j \to 0$) så får vi stångens massa. Beräkna stångens massa.