KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Lördagen den 11:e februari, 2012

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = xe^{-x^2/4}$.

2. Beräkna integralen
$$\int_0^2 \frac{\pi(x-3)+5x}{x^2-x-6}dx.$$

3. En vattenreservoar har förorenats av ett giftigt ämne. En naturlig rening sker genom att rent vatten rinner in i reservoaren samtidigt som förorenat vatten rinner ut i samma takt. I en modell över förloppet antas att koncentrationen $K(t)$ av det giftiga ämnet vid tiden t s uppfyller differentialekvationen
$$\frac{dK}{dt}(t) = \frac{-K(t)}{1500}.$$
Hur lång tid tar det enligt denna modell för koncentrationen av det giftiga ämnet att halveras?

DEL B

4. Låt $f(x) = e^x \cos x$.
   (a) Bestäm MacLaurinpolynomet (Taylorpolynomet vid $x = 0$) av grad 1 till f. **(2 p)**
   (b) Visa att **(2 p)**
$$|f(x) - 1 - x| < 3,$$
   då $0 \le x \le 1$.

5. Visa att olikheten
$$\ln x^2 < x - \frac{1}{x},$$
gäller för $x > 1$.

6. Låt a vara ett reellt tal. Kurvan $y = x^{-a}$, $1 \le x < \infty$ roterar ett varv kring x-axeln. För vilka värden på parametern a har den erhållna rotationskroppen en ändlig volym? Bestäm volymen för sådana a.

DEL C

7. (a) Definiera vad som menas med att serien **(2 p)**

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

är konvergent.

(b) Antag att $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ är positiv, kontinuerlig, avtagande och sådan att $f(j) = a_j$ för varje $j = 1, 2, 3, \ldots$ **(2 p)**

Visa att om

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

är konvergent så är även serien i (a) konvergent.

8. Låt $I : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vara definierad som

$$I(x) = \int_0^x (1 + \sin(t^2))\,dt.$$

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{I(x)}{2x}.$$

9. Låt a vara en reell konstant. För vilka värden på a är funktionen $f(x) = (x + a)|x|$ deriverbar i punkten $x = 0$?