KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-03-17

DEL A

1. Låt $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$ vara definierad för $x \in [0, \pi/2)$.
   (a) Ange värdemängden till f. **(2 p)**
   (b) Bestäm inversen till f och ange inversens definitionsmängd. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt oss derivera f,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan x}} \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan x} \cdot \cos^2 x}.$$

Vi observerar att $f'(x) > 0$, vilket ger att f är strängt växande. Vi har att $f(0) = 1$ och att

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = +\infty.$$

Alltså är värdemängden för f intervallet $V_f = [1, \infty)$.

(b) För att bestämma inversen till f vill vi lösa ut x som funktion av y i ekvationen $y = f(x)$. Vi har

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1 + \tan x} \\ y^2 &= 1 + \tan x \\ y^2 - 1 &= \tan x \\ x &= \arctan(y^2 - 1). \end{aligned}$$

Alltså $f^{-1}(y) = \arctan(y^2 - 1)$.

Svar.

(a) $V_f = [1, \infty)$

(b) $f^{-1}(y) = \arctan(y^2 - 1)$

2. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen $\sqrt{x}(x+3)$.

Lösningsförslag. Vi har att

$$\int \sqrt{x}(x+3)\,dx = \int (x^{3/2} + 3\sqrt{x})\,dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$$

Svar. $\frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$

3. Betrakta funktionen
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 1.$$
Hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 0$ (dvs. hur många stationära punkter har f) i intervallet $[0, 2]$?

Lösningsförslag. Vi har att $f'(x) = 4x^3 - 12x + 1$. Låt oss skissa funktionen f' i intervallet $[0, 2]$. För att inte bli förvirrade med derivator låter vi $g(x) := f'(x)$. Vi har $g(0) = 1$ och $g(2) = 9$. Derivation ger att $g'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x + 1)(x - 1)$. Funktionen g har en stationär punkt för $x = 1$ och $g(1) = -7$. Eftersom g är kontinuerlig, strängt avtagande i intervallet $[0, 1]$ och strängt växande i intervallet $[1, 2]$ så har g ett nollställe i vardera intervallen $[0, 1]$ och $[1, 2]$. Alltså två nollställen.

Svar. Ekvationen $f'(x) = 0$ har två lösningar i intervallet $[0, 2]$.

DEL B

4. En bil kör med hastigheten $v(t) = t^2 \ln t$ $(\mathrm{m/s})$ vid tidpunkten t (s).
   (a) Approximera bilens medelhastighet i intervallet $[1, 3]$ med hjälp av en Riemannsumma med två delintervall. **(2 p)**
   (b) Ange det exakta värdet på bilens medelhastighet i intervallet $[1, 3]$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) En Riemannsumma med två intervall ges av

$$v(1) + v(2) = 4 \ln 2.$$

Sträckan som bilen färdats från $t = 1$ till $t = 3$ är alltså approximativt $4 \ln 2$ (m) och bilens medelhastighet är därmed approximativt

$$v_{\mathrm{medel}} = \frac{s}{t} \approx \frac{4 \ln 2}{3 - 1} = 2 \ln 2 \ (\mathrm{m/s}).$$

(b) Bilens medelhastighet ges av

$$\frac{1}{3-1} \int_1^3 t^2 \ln t \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \ln t \right]_1^3 - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{t^2}{3} \, dt = \frac{9 \ln 3}{2} - \frac{13}{9} \ (\mathrm{m/s}).$$

där vi har använt oss utav partiell integration.

Svar.

(a) Svaret är inte entydigt.
(b) $\frac{9 \ln 3}{2} - \frac{13}{9}$ $(\mathrm{m/s})$.

5. Betrakta differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 8e^{-3x}.$$

(a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen. **(2 p)**

(b) Beräkna $y'''(0)$ om $y(0) = 4$ och $y'(0) = 1$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Den karakteristiska ekvationen ges av $r^2 + 2r + 5 = 0$, som har lösningarna $r = -1 \pm 2i$. Den homogena lösningen är

$$y_h(x) = e^{-x}(C\cos(2x) + D\sin(2x)), \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

För att finna partikulärlösningen ansätter vi $y_p(x) = Ee^{-3x}$. Vi har att

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 5y_p(x) = 9Ee^{-3x} - 6Ee^{-3x} + 5Ee^{-3x} = 8Ee^{-3x}.$$

Med andra ord måste $E = 1$. Den allmänna lösningen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(C\cos(2x) + D\sin(2x)) + e^{-3x}.$$

(b) Låt oss derivera ekvationen $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 8e^{-3x}$. Vi får

$$y'''(x) + 2y''(x) + 5y'(x) = -24e^{-3x}.$$

Därmed får vi att

$$\begin{aligned} y'''(x) &= -24e^{-3x} - 2y''(x) - 5y'(x) \\ &= -24e^{-3x} - 2(8e^{-3x} - 2y'(x) - 5y(x)) - 5y'(x) \end{aligned}$$

och $y'''(0) = -24 - 2(8 - 2 - 20) - 5 = -1$.

Svar.

(a) $y(x) = e^{-x}(C\cos(2x) + D\sin(2x)) + e^{-3x}$

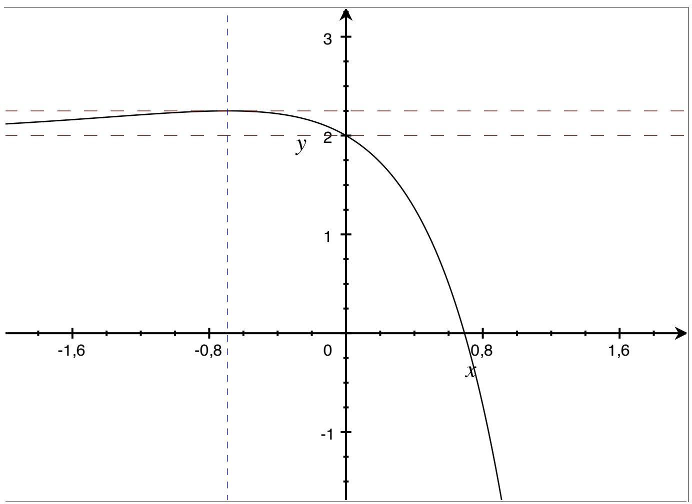
(b) $y'''(0) = -1$

6. Låt $f(x) = 2 + e^x - e^{2x}$. Bestäm för alla värden på talet a antalet lösningar till ekvationen $f(x) = a$.

Lösningsförslag. Vi behöver skissa grafen för f. Vi har att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (2 + e^{2x}(e^{-x} - 1)) = -\infty.$$

Eftersom f är deriverbar så räcker det med att söka värdena vid lokala max- och minpunkter. Dessa kan endast finnas vid stationära punkter. Vi har att $f'(x) = 0$ om och endast om $e^x - 2e^{2x} = 0$ vilket har den enda lösningen $x = -\ln 2$. Värdet i den stationära punkten är $f(-\ln 2) = 2 + 1/2 - 1/4 = 9/4$. Alltså har $f(x) = a$ två lösningar om $a \in (2, 9/4)$ och en lösning om $a = 9/4$ eller om $a \in (-\infty, 2]$. Ingen lösning finns om $a > 9/4$.



Svar. Två lösningar om $a \in (2, 9/4)$ och en lösning om $a = 9/4$ eller om $a \in (-\infty, 2]$. Ingen lösning om $a \in (9/4, \infty)$.

DEL C

7. Avgör om serien/integralen är konvergent eller divergent

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7+1}$, **(2 p)**

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x(2+\sin x)}{\ln x + x^{3/2} + x}\, dx.$ **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Eftersom termerna är positiva kan vi använda oss av uppskattningar enligt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Den senare är konvergent enligt känd sats och därmed är även den ursprungliga serien konvergent.

(b) Vi har att för stora x gäller att

$$\frac{x(2+\sin x)}{\ln x + x^{3/2} + x} \geq \frac{x}{\ln x + x^{3/2} + x} \geq \frac{x}{3x^{3/2}} = \frac{1}{3\sqrt{x}} > 0.$$

Eftersom

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{x}}\, dx$$

är divergent är även den ursprungliga integralen divergent.

Svar.

(a) konvergent

(b) divergent

8. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 0$ till f. **(2 p)**

(b) Använd Taylorpolynomet från (a) för att ge ett närmevärde till **(1 p)**

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

(c) Visa att felet vid approximationen i (b) inte är större än $1/10$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi har att

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}\cos(\theta x)$$

för något $\theta \in (0,1)$ och

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!}\cos(\theta x).$$

Med andra ord är Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 0$ till f: $1 - \frac{x^2}{6}$.

(b) Ett närmevärde får vi genom att använda oss utav Taylorpolynomet istället för f. Alltså

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{14}{9}.$$

(c) Felet ges av

$$\left| \int_0^2 \left(\frac{\sin x}{x} - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\right) dx \right| = \left| \int_0^2 \frac{x^4}{5!}\cos(\theta x)\, dx \right|$$
$$\leq \frac{1}{120}\int_0^2 x^4\, dx = \frac{2^5}{600} = \frac{32}{600} < \frac{1}{10}.$$

Svar.

(a) $1 - \frac{x^2}{6}$

(b) $14/9$

(c) se lösning

9. En funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sägs vara **konvex** i intervallet $[a,b]$ om för varje $x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
för alla t sådana att $0 \le t \le 1$.
(a) Visa att funktionen $f(x) = 1 - |x|$ inte är konvex i intervallet $[-2,2]$. **(2 p)**
(b) Visa att funktionen $g(x) = x^2$ är konvex i intervallet $(-\infty, \infty)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Funktionen f är ej konvex ty för $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ och $t = 1/2$ får vi att vänsterledet är $f(0) = 1$ medan högerledet är
$$\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{2} = 0.$$
(b) Låt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ och $0 \le t \le 1$. Vi vill visa att högerledet minus vänsterledet är icke-negativt. Alltså
$$\begin{aligned} tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - (tx_1 + (1-t)x_2)^2 &= t(1-t)x_1^2 + t(1-t)x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \\ &= t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \ge 0. \end{aligned}$$
Detta ger att $g(x) = x^2$ är en konvex funktion.

Svar.

(a) se lösning
(b) se lösning