KTH Teknikvetenskap

# SF1625 Envariabelanalys
# Tentamen
# Lördagen den 17:e mars, 2012

Skrivtid: 13:00-18:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 2–3, 2011–2012, ej period 2, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | – | – | – | – |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

1. Låt $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$ vara definierad för $x \in [0, \pi/2)$.
   (a) Ange värdemängden till $f$. **(2 p)**
   (b) Bestäm inversen till $f$ och ange inversens definitionsmängd. **(2 p)**

2. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen $\sqrt{x}(x + 3)$.

3. Betrakta funktionen
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + x + 1.$$
   Hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 0$ (dvs. hur många stationära punkter har $f$) i intervallet $[0, 2]$?

## DEL B

4. En bil kör med hastigheten $v(t) = t^2 \ln t$ (m/s) vid tidpunkten $t$ (s).
   (a) Approximera bilens medelhastighet i intervallet $[1, 3]$ med hjälp av en Riemannsumma med två delintervall. **(2 p)**
   (b) Ange det exakta värdet på bilens medelhastighet i intervallet $[1, 3]$. **(2 p)**

5. Betrakta differentialekvationen
$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 8e^{-3x}.$$
   (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen. **(2 p)**
   (b) Beräkna $y'''(0)$ om $y(0) = 4$ och $y'(0) = 1$. **(2 p)**

6. Låt $f(x) = 2 + e^x - e^{2x}$. Bestäm för alla värden på talet $a$ antalet lösningar till ekvationen $f(x) = a$.

## DEL C

7. Avgör om serien/integralen är konvergent eller divergent
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7+1}$, **(2 p)**
   (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x(2+\sin x)}{\ln x + x^{3/2} + x}\,dx$. **(2 p)**

8. Låt
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$
   (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad $2$ kring $x = 0$ till $f$. **(2 p)**
   (b) Använd Taylorpolynomet från (a) för att ge ett närmevärde till **(1 p)**
$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx.$$
   (c) Visa att felet vid approximationen i (b) inte är större än $1/10$. **(1 p)**

9. En funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sägs vara **konvex** i intervallet $[a,b]$ om för varje $x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$
   för alla $t$ sådana att $0 \leq t \leq 1$.
   (a) Visa att funktionen $f(x) = 1 - |x|$ inte är konvex i intervallet $[-2,2]$. **(2 p)**
   (b) Visa att funktionen $g(x) = x^2$ är konvex i intervallet $(-\infty, \infty)$. **(2 p)**