KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-06-07

DEL A

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 6y' + 9y = 0$, med $y(0) = -1$ och $y'(0) = 1$.

Lösningsförslag. Den karaktäristiska ekvationen är $r^2 + 6r + 9 = 0$. Lösningarna till denna ekvation är $r_1 = r_2 = -3$. Alltså ges den allmänna lösningen av $y(x) = (C+Dx)e^{-3x}$. Vi har att $y'(x) = -3(C + Dx)e^{-3x} + De^{-3x}$. Begynnelsevillkoren ger att $y(0) = C = -1$ och $y'(0) = -3C + D = 1$. Med andra ord är $C = -1$ och $D = -2$. Alltså får vi lösningen $y(x) = -(2x + 1)e^{-3x}$.

Svar. $y(x) = -(2x + 1)e^{-3x}$

2. Bestäm integralen

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

Lösningsförslag. Vi använder oss av variabelbytet $e^x = t$ vilket ger $\frac{dt}{dx} = e^x$. Vi får att

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

Svar. $\ln 2$

3. En partikel startar i vila och rör sig utefter en rät linje med accelerationen $100\cos t$ m/s^2 vid tiden t s. Vilken är partikelns hastighet och position vid tiden $t = 3$ s?

Lösningsförslag. Antag att partikeln är i $s = 0$ vid tiden $t = 0$ s. Hastigheten av partikeln ges av

$$v(t) = \int_0^t 100\cos x\,dx = 100\,[\sin x]_0^t = 100\sin t,$$

eftersom $v(0) = 0$ enligt förutsättning. Positionen av partikeln ges av

$$s(t) = \int_0^t 100\sin x\,dx = -100\,[\cos x]_0^t = -100\cos t + 100,$$

eftersom $s(0) = 0$. Alltså är hastigheten $v(3) = 100\sin 3$ och positionen $s(3) = 100(1 - \cos 3)$.

Svar. Hastigheten är $100\sin 3$ m/s och positionen är $100(1 - \cos 3)$ m.

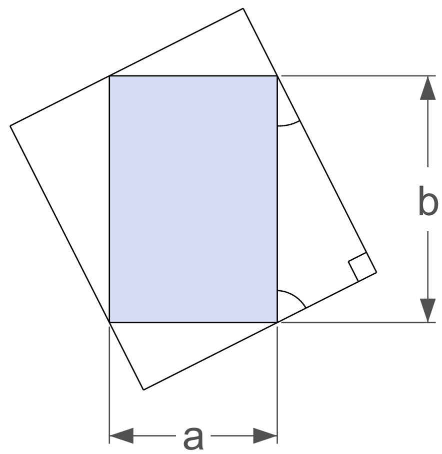
DEL B

4. Visa att ekvationen $8x^3 - 36x^2 + 46x = 15$ har minst en rot i vart och ett av intervallen $]0,1[$, $]1,2[$ och $]2,3[$.

Lösningsförslag. Vi observerar att funktionen $f(x) := 8x^3 - 36x^2 + 46x - 15$ är kontinuerlig. Satsen om mellanliggande värde säger oss att eftersom $f(0) = -15 < 0$, $f(1) = 3 > 0$, $f(2) = -3 < 0$ och $f(3) = 15 > 0$, så har f minst ett nollställe i vardera intervall, vilket är detsamma som att ekvationen har en rot i varje intervall.

Svar. se lösning

5. Bestäm den största arean man kan få av en rektangel som kan beskrivas så att varje sida går genom var sitt hörn av en annan rektangel med sidlängderna a och b.



Lösningsförslag. Vi inför vinkeln x i figuren och konstaterar att arean av den stora rektangeln är

$$A(x) = (b\cos x + a\sin x)(a\cos x + b\sin x) = ab + (a^2+b^2)\sin x\cos x.$$

Vi konstaterar att $A(0) = A(\pi/2) = ab$ och att $A(x) > ab$, då $0 < x < \pi/2$. Vi deriverar för att söka ett lokalt maximum,

$$A'(x) = (a^2+b^2)(\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Vi har att $A'(x) = 0$ om och endast om $\cos^2 x = \sin^2 x$. I det nämnda intervallet gäller detta endast då $x = \pi/4$. Den största arean är således $A(\pi/4) = ab + (a^2+b^2)/2$.

Svar. $A(\pi/4) = ab + (a^2+b^2)/2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$

6. Bestäm eventuella största och minsta värde till funktionen $f(x) = x^3e^{-x}$.

Lösningsförslag. Vi börjar med att utreda gränsvärdena vid $\pm\infty$. Alltså

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

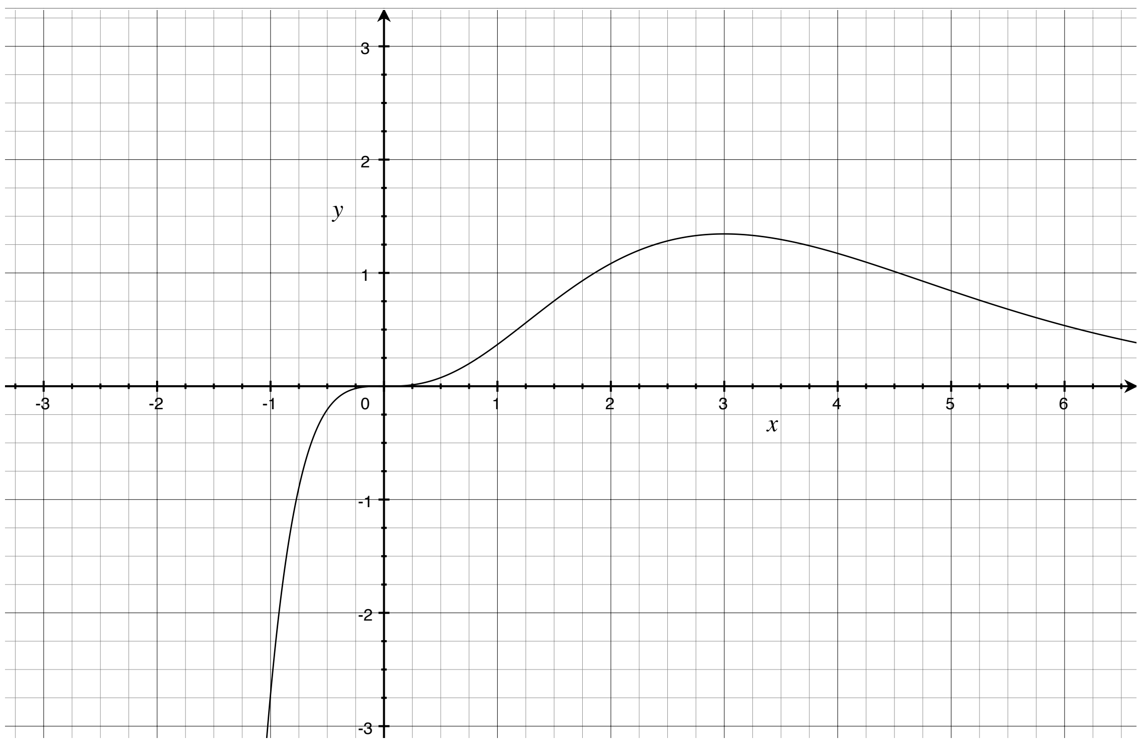
och

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

pga standardgränsvärde. Funktionen är deriverbar för varje x, vi har

$$f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}.$$

Alltså är de stationära punkterna i $x = 0$ och $x = 3$. Från en teckenstudie av derivatan f' så kan vi konstatera att f är växande i intervallet $]-\infty, 3]$ och avtagande i intevallet $[3, \infty[$. Alltså är det största värdet $f(3) = 27/e^3$ och minsta värde saknas.



Svar. Alltså är det största värdet $f(3) = 27/e^3 = (3/e)^3$ och minsta värde saknas.

DEL C

7. Låt f vara en integrerbar funktion och låt $S : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ vara definierad av

$$S(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Visa med hjälp av derivatans definition att $S' = f$. (Detta är Analysens huvudsats.)

Lösningsförslag. se boken.

Svar. se boken

8. Låt $f(x) = \cos(2x^2)$. Bestäm en Taylorutveckling p av f kring $x = 0$ sådan att $|f(x) - p(x)| < 10^{-6}$ för alla $x \in]-0.1, 0.1[$.

Lösningsförslag. Vi vet från standardutvecklingarna att

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\cos(\theta t)t^4}{4!}$$

för något $0 \leq \theta \leq 1$. Om $t = 2x^2$ så får vi

$$\cos 2x^2 = 1 - \frac{4x^4}{2} + \frac{16\cos(2\theta x^2)x^8}{4!}.$$

Låt oss studera resttermen, vi får att

$$\left|\frac{16\cos(2\theta x^2)x^8}{4!}\right| = \left|\frac{2\cos(2\theta x^2)x^8}{3}\right| \leq \left|\frac{2x^8}{3}\right| \leq 2/3 \cdot 10^{-8} < 10^{-6},$$

då $x \in]-0.1, 0.1[$. Alltså kan vi välja

$$p(x) = 1 - \frac{4x^4}{2}.$$

Svar.

$$p(x) = 1 - 2x^4.$$

9. Visa att

$$\frac{\pi}{20} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+100} \leq \frac{\pi}{20} + \frac{1}{100}.$$

Lösningsförslag. Eftersom $f(x) := 1/(x^2+100)$ är positiv, avtagande och kontinuerlig för $x \geq 0$ så gäller att summan kan jämföras med en integral, vi får

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+100} \leq \int_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{100}.$$

Det återstår att visa att

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{20}.$$

Vi har att

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{100} \int_0^R \frac{1}{1+(x/10)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{100} \left[10 \arctan(x/10)\right]_0^R = \frac{\pi}{20}.$$

Svar. se lösning