KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-10-17

DEL A

1. Visa att ekvationen

$$x^3 - 12x + 1 = 0$$

har tre lösningar i intervallet $-4 \le x \le 4$.
Motivera ordentligt! **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi skall visa att funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 1$ har tre nollställen i intervallet $[-4, 4]$.
f:s derivata är $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$ med nollställena $x = \pm 2$.
Tabellen:

x	-4		-2		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	17

visar att den kontinuerliga funktionen f har olika tecken i ändpunkterna av vart och ett av intervallen $]-4, -2[$, $]-2, 2[$ och $]2, 4[$. Satsen om mellanliggande värden ger att f har ett nollställe i vart och ett av intervallen. **Saken är klar**.

Svar. Påståendet visat.

2. Beräkna den obestämda integralen **(4 p)**

$$\int \frac{2x^2 + 13x + 19}{x^2 + 5x + 6}\, dx.$$

Lösningsförslag. Division av täljaren med nämnaren i integranden ger kvoten 2 och resten $3x + 7$.
Nämnaren har nollställena $x = -2$ och -3, så den faktoriseras som $(x + 2)(x + 3)$.
Integranden blir $\frac{2x^2+13x+19}{x^2+5x+6} = 2 + \frac{3x+7}{(x+2)(x+3)} = 2 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = 2 + \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$, där $A + B = 3,\ 3A + 2B = 7$, så $A = 1,\ B = 2$.
Det ger $\int \frac{2x^2+13x+19}{x^2+5x+6}\, dx = \int (2 + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3})\, dx = 2x + \ln|x + 2| + 2\ln|x + 3| + C(x)$, där $C(x)$ har derivatan 0 i intervall där integranden är definierad, så $C(x)$ är konstant i vart och ett av intervallen $]-\infty, -3[,\ ]-3, -2[$ och $]-2, \infty[$.

Svar. Den obestämda integralen är $2x + \ln|x + 2| + 2\ln|x + 3| + C(x)$, där $C(x)$ är konstant i vart och ett av intervallen $]-\infty, -3[,\ ]-3, -2[$ och $]-2, \infty[$.

3. Använd Maclaurinpolynomet (dvs Taylorpolynomet kring punkten $x = 0$) av grad 3 till funktionen $f(x) = e^x$ för att finna ett närmevärde till $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **(4 p)**
Svaret kan vara en kvot av två heltal, det behöver alltså inte ges som ett decimalbråk.

Lösningsförslag. Maclaurinpolynomet av grad 3 för $f(x) = e^x$ ges av $f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (eller som en standardutveckling).
$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$, så den sökta approximationen är $1+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^3 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48} = \frac{48-24+6-1}{48} = \frac{29}{48}$.
(I själva verket är $\frac{29}{48} \approx 0,6042,\ \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6065$.)

Svar. Det sökta närmevärdet är $\frac{29}{48}$.

DEL B

4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade område som begränsas av x-axeln och kurvan
$$y = \sqrt{x(4-x^2)}, \quad x \geq 0$$
roteras kring x-axeln. **(4 p)**

Lösningsförslag. $\sqrt{x(4-x^2)}$ är definierad om och endast om $x(4-x^2) \geq 0$. Då $x \geq 0$ är det precis då $0 \leq x \leq 2$.
Den sökta volymen fås (med ”skivformeln” för en rotationsvolym) som $\pi \int_0^2 y(x)^2\,dx = \pi \int_0^2 x(4-x^2)\,dx = \pi \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi(\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0) = \pi(8 - \frac{16}{4}) = 4\pi$ (v.e.).

Svar. Den sökta volymen är 4π v.e.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = x^2 - x + 2$$

som tangerar x-axeln i origo. **(4 p)**

Lösningsförslag. Karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena ekvation är $r^2 - 2r + 1 = 0$, med dubbelroten $r_{1,2} = 1$, så den homogena ekvationens allmänna lösning är $y_h(x) = (C_1x + C_2)e^x$.

För en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen görs ansatsen $y(x) = Ax^2+Bx+C$. Insättning i ekvationen ger $2A-2(2Ax+B)+Ax^2+Bx+C = Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B+C) = x^2-x+2$. Identifikation av koefficienterna ger $A = 1,\ B = 3,\ C = 6$, så $y_p(x) = x^2 + 3x + 6$.

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1x + C_2)e^x + x^2 + 3x + 6$, vilket ger $y'(x) = C_1e^x + (C_1x + C_2)e^x + 2x + 3$.

Konstanterna C_1 och C_2 bestäms av villkoret att lösningskurvan tangerar x-axeln i origo: $y(0) = y'(0) = 0$, så $C_2 + 6 = C_1 + C_2 + 3 = 0$, vilket ger $C_1 = 3,\ C_2 = -6$ och lösningen $y(x) = (3x - 6)e^x + x^2 + 3x + 6$.

Svar. Den sökta lösningen är $y(x) = 3(x - 2)e^x + x^2 + 3x + 6$.

6. (a) Ställ upp en matematisk modell för hur temperaturen beror av tiden när man fryser in ett nybakt bröd. Brödet har temperaturen $30°$C när man sätter in det i frysen, som håller den konstanta temperaturen $-20°$C.
Vi antar för enkelhets skull att temperaturen är densamma i hela brödet och att den följer Newtons avsvalningslag, dvs att brödets temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan frysens och brödets temperaturer. **(2 p)**
(b) Efter en timme i frysen har brödet temperaturen $10°$C. Vad är brödets temperatur efter 2 timmar i frysen? **(2 p)**

Lösningsförslag. Vi kallar brödets temperatur vid tiden t (samma i hela brödet) för $T(t)$ (°C) och frysens konstanta temperatur $T_f(=-20)$ (°C).
Enligt Newtons avsvalningslag gäller då $T' = -k \cdot (T - T_f)$, där k är en konstant (som bör vara positiv).
Villkoret att brödets temperatur vid $t = 0$ (när brödet sätts in i frysen) är 30°C ger $T(0) = 30$.
Med $y(t) = T(t) - T_f$ blir problemet $y' + ky = 0$, $y(0) = 30 - (-20) = 50$, med lösning $y(t) = 50\,e^{-kt}$, dvs $T(t) = -20 + 50\,e^{-kt}$.
Om vi mäter t i timmar ger villkoret i (b) att $T(1) = -20+50\,e^{-k} = 10$, så $e^{-k} = \frac{30}{50}$.Efter 2 timmar är brödets temperatur då $T(2) = -20+50\,e^{-2k} = -20+50\cdot(\frac{3}{5})^2 = -20+18 = -2$ (°C).

Svar.

(a) En enkel modell är $\begin{cases} T' + k(T - T_f) = 0, \\ T(0) = 30, \end{cases}$ där $T(t)$ är brödets temperatur i °C vid tiden t timmar efter att det satts in i frysen, T_f är frysens temperatur i °C och k är en konstant.

(b) Efter 2 timmar har brödet enligt modellen temperaturen $-2°$C.

DEL C

7. (a) Låt f vara en funktion som är definierad för alla $x \geq M$, där M är ett fixt reellt tal. Definiera vad som menas med att f har gränsvärdet A då x går mot ∞, **(2 p)**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

(b) Bevisa med hjälp av definitionen i uppgift a att **(2 p)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

Lösningsförslag. Definitionen kan (eftersom $f(x)$ är definierad för alla tillräckligt stora x) formuleras så:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

betyder att

det för varje reellt tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal ω sådant att $x > \omega \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Eftersom $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ för alla x, gäller (då $x \neq 0$) att $|\frac{\arctan x}{x} - 0| < \frac{\frac{\pi}{2}}{|x|}$, så om $|x| > \frac{\pi}{2\varepsilon}$ är $|\frac{\arctan x}{x} - 0| < \varepsilon$ och enligt definitionen i (a) (med $\omega = \frac{\pi}{2\varepsilon}$) är $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$.
Saken är klar.

Svar. Se lösningen.

8. Låt $\alpha > 1$ vara ett reellt tal. Visa att **(4 p)**

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \text{ då } x \geq -1.$$

Lösningsförslag. Vi skall visa att $f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) \geq 0$ då $x \geq -1$.

Derivering ger $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$. $f'(x) > 0$ då $x > 0$ och $f'(x) < 0$ då $-1 \leq x < 0$, så f är avtagande för $-1 \leq x \leq 0$ och växande för $0 \leq x$.

($\alpha > 1$ ger att $(1+x)^{\alpha-1} \geq 1$ då $x \geq 0$ (dvs $1+x \geq 1$) och $(1+x)^{\alpha-1} \leq 1$ då $-1 \leq x \leq 0$ (dvs $0 \leq 1+x \leq 1$)).

Eftersom $f(0) = 1^\alpha - (1+\alpha\cdot 0) = 1-1 = 0$ ger det påståendet, se tabellen:

x	-1		0	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Saken är klar.

Svar. Påståendet visat.

9. Bestäm gränsvärdet **(4 p)**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right).$$

Ledning: Tänk på Riemannsummor.

Lösningsförslag. $\ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$, så summan är $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$, vilket är en Riemannsumma för integralen $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ (med $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$, så $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$). Eftersom $\ln(1+x)$ är kontinuerlig på $[0,1]$ konvergerar summan mot integralen då $n\to\infty$. Integralen beräknas med partialintegration: $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [(1+x)\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\frac{1}{1+x}\,dx = 2\ln 2 - 1\ln 1 - 1 = 2\ln 2 - 1$.

Svar. Gränsvärdet är $2\ln 2 - 1$.