KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Onsdagen den 17 oktober, 2012

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Bengt Ek, Maria Saprykina

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Visa att ekvationen
$$x^3 - 12x + 1 = 0$$
har tre lösningar i intervallet $-4 \leq x \leq 4$.
Motivera ordentligt! **(4 p)**

2. Beräkna den obestämda integralen **(4 p)**
$$\int \frac{2x^2 + 13x + 19}{x^2 + 5x + 6}\, dx.$$

3. Använd Maclaurinpolynomet (dvs Taylorpolynomet kring punkten $x = 0$) av grad 3 till funktionen $f(x) = e^x$ för att finna ett närmevärde till $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **(4 p)**
Svaret kan vara en kvot av två heltal, det behöver alltså inte ges som ett decimalbråk.

DEL B

4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade område som begränsas av x-axeln och kurvan
$$y = \sqrt{x(4 - x^2)}, \quad x \geq 0$$
roteras kring x-axeln. **(4 p)**

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' - 2y' + y = x^2 - x + 2$$
som tangerar x-axeln i origo. **(4 p)**

6. (a) Ställ upp en matematisk modell för hur temperaturen beror av tiden när man fryser in ett nybakt bröd. Brödet har temperaturen 30°C när man sätter in det i frysen, som håller den konstanta temperaturen −20°C.
Vi antar för enkelhets skull att temperaturen är densamma i hela brödet och att den följer Newtons avsvalningslag, dvs att brödets temperaturändring per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan frysens och brödets temperaturer. **(2 p)**
(b) Efter en timme i frysen har brödet temperaturen 10°C. Vad är brödets temperatur efter 2 timmar i frysen? **(2 p)**

Del C

7. (a) Låt f vara en funktion som är definierad för alla $x \geq M$, där M är ett fixt reellt tal. Definiera vad som menas med att f har gränsvärdet A då x går mot ∞, **(2 p)**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

   (b) Bevisa med hjälp av definitionen i uppgift a att **(2 p)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

8. Låt $\alpha > 1$ vara ett reellt tal. Visa att **(4 p)**

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \text{ då } x \geq -1.$$

9. Bestäm gränsvärdet **(4 p)**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right).$$

Ledning: Tänk på Riemannsummor.