KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-12-10

DEL A

1. Låt funktionen f ha definitionsmängden $D_f =]0,\infty[$ och ges av

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}.$$

(a) Finn f:s invers f^{-1}. **(2 p)**
(b) Finn inversens värdemängd $V_{f^{-1}}$. **(1 p)**
(c) Finn inversens definitionsmängd $D_{f^{-1}}$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, så f^{-1} fås om man ”löser ut” x ur $y = f(x)$.
$y = e^{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 - \ln y \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\ln y}$, så (byt x och y) $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\ln x}$.

(b) Inversens värdemängd är funktionens definitionsmängd, så $V_{f^{-1}} = D_f =]0,\infty[$.

(c) Inversens definitionsmängd är funktionens värdemängd, $D_{f^{-1}} = V_f$ och
$x \in]0,\infty[\Leftrightarrow \frac{1}{x} \in]0,\infty[\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \in]-\infty, 1[\Leftrightarrow e^{1-\frac{1}{x}} \in]0, e[$, så $V_f =]0, e[= D_{f^{-1}}$
(Man kan alternativt visa att $f'(x) > 0$ då $x > 0$ och att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = e$.)

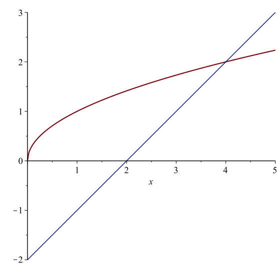
Svar.

(a) Inversfunktionen är $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\ln x}$,
(b) inversens värdemängd är $V_{f^{-1}} =]0,\infty[$,
(c) inversens definitionsmängd är $D_{f^{-1}} =]0, e[$.

2. Bestäm arean av det område i första kvadranten (dvs där $x \geq 0$ och $y \geq 0$) som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$, x-axeln och linjen $y = x - 2$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Skärningen mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = x - 2$ ges av $\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4} = 4, 1$, men kvadreringen gav en falsk rot ($x = 1$ ger $\sqrt{1} = 1 \neq 1 - 2 = -1$) och bara $x = 4$ ger en skärningspunkt ($x = 4$ ger $\sqrt{4} = 2 = 4 - 2$).

Eftersom området (se fig.) för $0 \leq x \leq 2$ ges av $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ och för $2 \leq x \leq 4$ av $2 - x \leq y \leq \sqrt{x}$ är den sökta arean $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \int_2^4 (x-2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 - 0 - (\frac{16}{2} - 8 - (\frac{4}{2} - 4)) = \frac{10}{3}$ a.e. (areaenheter).



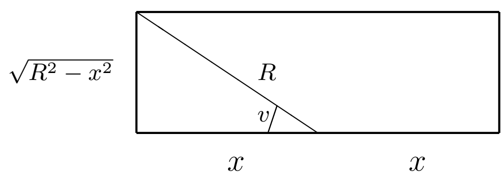
Lite enklare räkningar får man om man noterar att området kan beskrivas av $y^2 \leq x \leq y + 2,\ 0 \leq y \leq 2$. Arean kan då fås genom att integrera i y-led: $\int_0^2 (y + 2 - y^2)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{10}{3}$.

Svar. Den sökta arean är $\frac{10}{3}$ a.e.

3. Vi betraktar en halvcirkel med radie R och motsvarande diameter (mellan halvcirkelns ändpunkter).
   En rektangel har två hörn på halvcirkeln och de andra två hörnen på diametern. Vilken är den maximala area rektangeln kan ha? **(4 p)**

Lösningsförslag. Om vi kallar (se fig.) rektangelns sida längs diametern för $2x$, blir den andra sidan $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Rektangelns area blir $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$, där $0 \leq x \leq R$.
För att finna den maximala arean deriverar vi och får
$A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{R^2-x^2}}(R^2 - x^2 - x^2) = \frac{2}{\sqrt{R^2-x^2}}(R^2 - 2x^2)$



För att försäkra oss om att derivatans enda nollställe i A:s definitionsmängd, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}R$, svarar mot det största värdet studerar vi en teckentabell:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}R$		R
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	R^2	$\searrow$	0

Vi ser att areans maximala värde är R^2, som fås då $x = \frac{1}{\sqrt{2}}R$ (och de båda sidorna $\sqrt{2}R$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}R$).

Alternativt kan man införa vinkeln v i figuren. Då blir rektangelns sidor $2R\cos v$ och $R\sin v$, så dess area $2R\cos v \cdot R\sin v = R^2\sin(2v)$, som tydligen är maximal $= R^2$ då $2v = \frac{\pi}{2}$.

Svar. Den maximala arean är R^2.

DEL B

4. Finn alla $y(x)$ som uppfyller **(4 p)**

$$\begin{cases} y'' + y' = 2\sin x, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

Lösningsförslag. För att finna y_h, den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, löser vi den karakteristiska ekvationen $r^2 + r = 0$ och får $r_1 = 0,\ r_2 = -1$.
Det ger $y_h(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$, där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.
För att finna en partikulärlösning y_p, betraktar vi den komplexa ekvationen $u''+u' = 2e^{ix}$.
Om $u(x)$ löser den, löser dess imaginärdel, $\operatorname{Im} u$, den givna ekvationen.
Ansatsen $u(x) = Ae^{ix}$ ger i ekvationen: $(i^2A + iA)e^{ix} = 2e^{ix}$, så $A = \frac{2}{-1+i} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1 - i$ ger en lösning $u_p(x) = (-1 - i)e^{ix} = (-1 - i)(\cos x + i\sin x) = -\cos x + \sin x + i(-\cos x - \sin x)$, så $y_p(x) = -\cos x - \sin x$. (Alternativt kan man göra ansatsen $y(x) = a\cos x + b\sin x$, sätta in i den reella ekvationen och få att $a = b = -1$ ger en lösning.
Vi har alltså funnit den allmänna lösningen till den givna ekvationen: $y(x) = y_h + y_p = C_1 + C_2e^{-x} - \cos x - \sin x$. Den ger $y'(x) = -C_2e^{-x} + \sin x - \cos x$. Konstanterna C_1 och C_2 bestäms av bivillkoren enligt $y(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0,\ y'(0) = -C_2 - 1 = -3$, som ger $C_1 = -1,\ C_2 = 2$.
Den enda lösningen till problemet är alltså $y(x) = -1 + 2e^{-x} - \cos x - \sin x$.

Svar. Den enda lösningen till problemet är $y(x) = -1 + 2e^{-x} - \cos x - \sin x$.

5. (a) Finn Maclaurinutvecklingarna av ordning sex till $f(x) = \cos(x^3)$ och $g(x) = e^{2x^2}$. Resttermen får ges på svag form, dvs så att bara felets storleksordning framgår. **(2 p)**

(b) Beräkna gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3) - 1}{(e^{2x^2} - 1)^3}.$$

Lösningsförslag.

(a) Den kända utvecklingen $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 \cdot B_1(t)$ ger $\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + x^{12} \cdot B(x)$. P.s.s. ger $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^4 \cdot C_1(t)$ att $e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{4x^4}{2} + \frac{8x^6}{6} + x^8 \cdot C(x) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 + x^8 \cdot C(x)$.
Här är, som vanligt, $B_1(t), C_1(t)$ begränsade funktioner i en omgivning till $t = 0$ och $B(x), C(x)$ begränsade i en omgivning av $x = 0$.

(b) $\cos(x^3) - 1 = -\frac{1}{2}x^6 + x^{12} \cdot B(x)$ och $(e^{2x^2} - 1)^3 = (2x^2 + x^4 \cdot D(x))^3 = 8x^6 + x^8 \cdot E(x)$, där $D(x),\ E(x)$ också är begränsade i en omgivning till $x = 0$.
Det ger $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)-1}{(e^{2x^2}-1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^6 + x^{12}\cdot B(x)}{8x^6 + x^8 \cdot E(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + x^6 \cdot B(x)}{8 + x^2 \cdot E(x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{8} = -\frac{1}{16}$.

Svar.

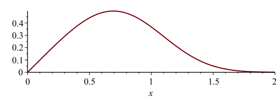
(a) $\cos(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + x^{12} \cdot B(x)$, $e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 + x^8 \cdot C(x)$, där $B(x),\ C(x)$ är begränsade i en omgivning till $x = 0$.

(b) Gränsvärdet är $-\frac{1}{16}$.

6. Betrakta den rotationskropp K som bildas då det begränsade område i planet som omsluts av x-axeln, kurvan $y = xe^{-x^3}$ och linjen $x = 2$ roteras kring y-axeln.
   (a) Ställ upp en integral vars värde ger K:s volym och motivera varför den gör det. **(2 p)**
   (b) Beräkna K:s volym. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a)



Låt $f(x) = xe^{-x^3}$ (se fig. till höger).
Om rotationskroppen delas upp i "rör" med radie x, höjd $f(x)$ och (den lilla) tjockleken Δx får de volymen $\Delta V \approx 2\pi x \cdot f(x) \cdot \Delta x$, med ett relativt fel som $\to 0$ då $\Delta x \to 0$. Den totala volymen av kroppen är summan av dessa för olika x-värden och då $\Delta x \to 0$ går den mot integralen $2\pi \int_0^2 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 x^2 e^{-x^3} dx$.

(b) Integralen i (a) ger volymen $2\pi \int_0^2 x^2 e^{-x^3}\, dx = \begin{bmatrix} t = x^3 & x = 2 \Rightarrow t = 8 \\ dt = 3x^2 dx & x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{bmatrix} =$ $2\pi \int_0^8 \frac{1}{3} e^{-t}\, dt = \frac{2\pi}{3} \left[-e^{-t}\right]_0^8 = \frac{2\pi}{3}(1 - e^{-8})$ v.e. (volymsenheter).

Svar.

(a) Volymen ges av integralen $2\pi \int_0^2 x^2 e^{-x^3} dx$, motiverad i lösningen,
(b) den är $\frac{2\pi}{3}(1 - e^{-8})$ v.e.

DEL C

7. Bevisa satsen:
Om en funktion f är deriverbar i punkten x_0 är den också kontinuerlig där. **(4 p)**

Lösningsförslag. Att f är kontinuerlig i punkten x_0 betyder enligt definitionen av kontinuitet att $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dvs att $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Att f är deriverbar i punkten x_0 betyder p.s.s. enligt definitionen av derivata att $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ existerar (som ett egentligt, dvs ändligt, gränsvärde).

Om vi antar att f är deriverbar i punkten x_0 ger satsen om gränsvärdet av en produkt (och att $\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$, vilket följer av att funktionen x är kontinuerlig (eller från $\varepsilon\delta$-definitionen av gränsvärde, med $\delta = \varepsilon$):

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Därmed är det visat att deriverbarhet i x_0 medför kontinuitet i x_0, **saken är klar**.

Svar. (Se lösningen.)

8. En sfärisk behållare med radie R m fylls med vatten i en takt av v m^3 per minut. Hur snabbt, dvs med hur många meter per minut, stiger vattenytan vid den tidpunkt då vattennivån är $\frac{R}{4}$ m (över behållarens lägsta punkt)? **(4 p)**

Lösningsförslag. Då vattennivån är $\frac{R}{4}$ m är vattenytan $\frac{3R}{4}$ m från sfärens centrum. Med Pytagoras sats får man att den cirkulära vattenytans radie är $\sqrt{R^2 - (\frac{3R}{4})^2} = \frac{\sqrt{7}R}{4}$ m. Under (den korta) tiden Δt ändras då vattennivån med Δh m, där $v\Delta t = \pi(\frac{\sqrt{7}R}{4})^2 \Delta h$ (volymsändringen uttryckt på två sätt), som vanligt med ett relativt fel som $\to 0$ då $\Delta t \to 0$. Det ger $h'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{v}{\pi \frac{7}{16} R^2} = \frac{16v}{7\pi R^2}$ m per minut.

Alternativt kan man beräkna volymen av vattnet som funktion av nivån h, $V(h) = \pi \int_0^h (R^2 - (R-y)^2)\,dy = \ldots = \pi(Rh^2 - \frac{h^3}{3})$. Då ger (kedjeregeln) $v = \frac{dV}{dt} = V'(h) \cdot h'(t)$ samma $h'(t)$ som ovan (då $h = \frac{R}{4}$).

Svar. Vattenytan stiger vid den aktuella tidpunkten med hastigheten $\frac{16v}{7\pi R^2}$ m per minut.

9. (a) Visa att $\ln(1+x) < x$ för alla $x > 0$. **(1 p)**

(b) Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+ne^{-n^2})$$

är konvergent eller divergent. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt $f(x) = \ln(1+x) - x$. Vi vill visa att $f(x) < 0$ för alla $x > 0$.
$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ då $x > 0$. Eftersom $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$ ger medelvärdessatsen för $x > 0$ att $f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0)$, där $0 < \xi < x$. $f'(\xi)x < 0$, så $f(x) < 0$ om $x > 0$, **saken är klar**.
I stället för att använda medelvärdessatsen kan man förstås utnyttja att om $f'(x) < 0$ i ett intervall är f strängt avtagande där, så påståendet följer av att $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$.

(b) Eftersom $0 < \ln(1+ne^{-n^2}) < ne^{-n^2}$ (den andra olikheten enligt (a)) räcker det enligt känd sats om jämförelse av positiva serier att visa att $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ är konvergent.
Låt $f(t) = te^{-t^2}$. Då är $f'(t) = e^{-t^2} + t(-2t)e^{-t^2} = (1-2t^2)e^{-t^2}$, som är < 0 för alla $t \geq 1$, så $f(t)$ är avtagande för $t \geq 1$ och eftersom den också är ≥ 0 kan vi använda Cauchys integralkriterium för konvergens av serien.
$\int_1^X te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_1^X = -\frac{1}{2}e^{-X^2} + \frac{1}{2e} \to \frac{1}{2e}$ då $X \to \infty$.
$\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ är alltså konvergent och enligt Cauchys integralkriterium är $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ och därmed den givna serien också det. **Saken är klar.**

Svar. (Se lösningen)