KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 10 december, 2012

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Bengt Ek, Maria Saprykina

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. Bonuspoäng tillgodoräknas vid de upp till två första tentamina man skriver under läsåret. Kontrollskrivning i svarar då mot uppgift i ($i = 1, 2$) och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C. För de högsta betygen, A och B, krävs vissa poäng på del C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt funktionen f ha definitionsmängden $D_f =]0, \infty[$ och ges av
$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}.$$
   (a) Finn f:s invers f^{-1}. **(2p)**
   (b) Finn inversens värdemängd $V_{f^{-1}}$. **(1p)**
   (c) Finn inversens definitionsmängd $D_{f^{-1}}$. **(1p)**

2. Bestäm arean av det område i första kvadranten (dvs där $x \geq 0$ och $y \geq 0$) som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$, x-axeln och linjen $y = x - 2$. **(4p)**

3. Vi betraktar en halvcirkel med radie R och motsvarande diameter (mellan halvcirkelns ändpunkter).
En rektangel har två hörn på halvcirkeln och de andra två hörnen på diametern. Vilken är den maximala area rektangeln kan ha? **(4p)**

DEL B

4. Finn alla $y(x)$ som uppfyller **(4p)**
$$\begin{cases} y'' + y' = 2\sin x, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

5. (a) Finn Maclaurinutvecklingarna av ordning sex till $f(x) = \cos(x^3)$ och $g(x) = e^{2x^2}$.
Resttermen får ges på svag form, dvs så att bara felets storleksordning framgår. **(2p)**
   (b) Beräkna gränsvärdet **(2p)**
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^3) - 1}{(e^{2x^2} - 1)^3}.$$

6. Betrakta den rotationskropp K som bildas då det begränsade område i planet som omsluts av x-axeln, kurvan $y = xe^{-x^3}$ och linjen $x = 2$ roteras kring y-axeln.
   (a) Ställ upp en integral vars värde ger K:s volym och motivera varför den gör det. **(2p)**
   (b) Beräkna K:s volym. **(2p)**

DEL C

7. Bevisa satsen:
   Om en funktion f är deriverbar i punkten x_0 är den också kontinuerlig där. **(4p)**

8. En sfärisk behållare med radie R m fylls med vatten i en takt av v m^3 per minut.
   Hur snabbt, dvs med hur många meter per minut, stiger vattenytan vid den tidpunkt då vattennivån är $\frac{R}{4}$ m (över behållarens lägsta punkt)? **(4p)**

9. (a) Visa att $\ln(1+x) < x$ för alla $x > 0$. **(1p)**
   (b) Avgör om serien
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + ne^{-n^2})$$
   är konvergent eller divergent. **(3p)**