Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1148 Flervariabelanalys för E1,
07–03–13, kl. 14.00–19.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 14–18 poäng ger betyget 3, 19–24 poäng ger betyget 4, och 25–28 poäng ger betyget 5.
- Om du har fått 13 poäng så har du möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.

1. Genom varje punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ i xy-planet går en nivåkurva till funktionen $f(x, y) = xy$ och en nivåkurva till funktionen $g(x, y) = x^2 - y^2$. Bestäm vinkeln $\phi(x, y)$ mellan dessa båda nivåkurvor. (3p)

2. (a) Låt $F(x, y, z)$ vara en funktion som är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}^3$. En känd sats säger att om

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0,$$

så kan man lösa ut z som en funktion av x och y ur ekvationen $F(x, y, z) = 0$ i en öppen omgivning av (a, b, c):

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = z(x, y) \quad \text{då} \quad (x, y, z) \approx (a, b, c).$$

Visa att i så fall är

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}. \qquad (2p)$$

(b) Avgör var i $\mathbb{R}^3$ som man kan lösa ut z ur ekvationen

$$x^2 z + y^2 z^2 - 4xy - z^3 = 0,$$

samt beräkna sedan $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$ i detta område. (1p)

3. Låt $0 < a < b$. Beräkna massan av det ihåliga klotet

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\},$$

om densiteten ges av

$$\rho(x, y, z) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (3p)$$

4. Kurvan γ går raka vägen från (0,0) till (1,0), därifrån raka vägen till (0,1), och till slut raka vägen från (0,1) till (0,0). Beräkna kurvintegralen

$$I = \oint_\gamma (x^2 + y^2)\, dx + (x + 2)\, dy. \qquad \text{(3p)}$$

5. Vi söker rotationssymmetriska lösningar till Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

det vill säga lösningar av formen

$$u(x, y) = f(r), \quad \text{där} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0.$$

(a) Härled den ordinära differentailekvation som lösningen $f(r)$ uppfyller. (3p)

(b) Visa att differentialekvationen för $f(r)$ är ekvivalent med

$$\frac{d}{dr}(r \cdot f'(r)) = 0 \quad \text{då} \quad r \neq 0,$$

och bestäm sedan den allmänna lösningen. (1p)

6. Låt K vara den kropp i $\mathbb{R}^3$ som definieras av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \leq x + y \leq 2, \\ 1 \leq x + z \leq 2, \\ 1 \leq y + z \leq 2. \end{cases}$$

Beräkna integralen

$$I = \iiint_K \frac{x + y}{(x + z)(y + z)}\, dxdydz. \qquad \text{(4p)}$$

7. Låt K vara den ändliga kropp i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av rotationsparaboloiderna

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{och} \quad z = 1 - (x^2 + y^2).$$

Beräkna integralen

$$I = \iiint_K z\, dxdydz. \qquad \text{(4p)}$$

8. En partikel som påverkas av kraften

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (2xye^{x^2+y}, (1 + y)e^{x^2+y} + 2y)$$

rör sig moturs längs ellipsen

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

från (0,2) till (1,0). Beräkna det arbete som kraften uträttar. (4p)

Lycka till!
Olle.