Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till 5B1148 Flervariabelanalys för E1, 07–06–07, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 14–18 poäng ger betyget 3, 19–24 poäng ger betyget 4, och 25–28 poäng ger betyget 5.
- Om du har fått 13 poäng så har du möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.

1. *Visa att funktionen*

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x-5y)\ln(x^2+y^2) & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

är kontinuerlig i origo. (3p)

Lösning: Vi använder ekvivalensen

$$(x,y) \to (0,0) \iff r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

Så vi skriver f som

$$\begin{aligned} f &= (2r\cos\phi - 5r\sin\phi)\cdot\ln(r^2) \\ &= 2r\ln r\cdot(2\cos\phi - 5\sin\phi) \quad \text{då } r \neq 0. \end{aligned}$$

Enligt l'Hospitals regel är

$$\lim_{r\to 0} r\ln r = \lim_{r\to 0}\frac{\ln r}{r^{-1}} = \frac{''-\infty''}{\infty} = \lim_{r\to 0}\frac{r^{-1}}{-r^{-2}} = \lim_{r\to 0}(-r) = 0,$$

varför

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = \lim_{r\to 0} f = 0 = f(0,0) \Longrightarrow f \text{ är kontinuerlig i } (0,0).$$

2. *Bestäm alla lokala maxima och minima för funktionen*

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Stationära punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 3x^2 + 6x + 4y, \\ 0 = \partial f/\partial y = 4x + 2y. \end{cases}$$

Andra ekvationen visar att $y = -2x$; insättning av detta i den första ekvationen ger sedan att

$$0 = 3x^2 + 6x - 8x = x(3x-2) \iff x = \begin{cases} 0 \\ 2/3 \end{cases} \implies y = \begin{cases} 0 \\ -4/3. \end{cases}$$

Så $(0,0)$ och $(2/3, -4/3)$ är stationära. Andraderivatorna ges av

$$f''_{xx} = 6x + 6, \quad f''_{xy} = 4, \quad f''_{yy} == 2.$$

I $(0,0)$ är $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = -4$, så (0.0) är en *sadelpunkt*. I $(2/3, -4/3)$ är $f''_{xx} = 10 > 0$ och $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 4 > 0$, så att $(2/3, -4/3)$ är ett *lokalt minimum*.

3. *Beräkna funktionen*

$$F(a) = \int_{x=0}^{a} \left(\int_{y=x}^{a} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx$$

då $a > 0$. (3p)

Lösning: Genom att RITA EN FIGUR inser man att man kan kasta om integrationsordningen och få följande integrationsgränser:

$$F(a) = \int_{y=0}^{a} \left(\int_{x=0}^{y} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \right) dy.$$

Här är den inre integralen lika med

$$\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=y} = \sqrt{2y^2} - \sqrt{y^2} = (\sqrt{2}-1)y, \text{ eftersom } y > 0.$$

Därmed blir

$$F(a) = (\sqrt{2}-1)\int_0^a y\, dy = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2.$$

4. *Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen*

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

antar på den slutna cirkelskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$. (3p)

Lösning: Vi behandlar *det inre* för sig, och *randen* för sig.

INRE PUNKTER: De stationära punkterna ges av

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 2x - y \Longrightarrow y = 2x, \\ 0 = \partial f/\partial y = -x + 2y = 3x \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow (0,0)$ är den enda stationära punkten. Och $f(0,0) = 0$.

RANDEN: På randen är $x = 2\cos\phi$ och $y = 2\sin\phi$, så

$$f = 4\cos^2\phi - 4\cos\phi\sin\phi + 4\sin^2\phi = 4 - 2\sin 2\phi.$$

Största värdet blir därför $4 + 2 = 6$ då $\sin 2\phi = -1$, och det minsta $4 - 2 = 2$ då $\sin 2\phi = 1$

SVAR: Största värdet $= 6$, minsta $= 0$.

5. *Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara funktioner som har kontinuerliga andraderivator, men som i övrigt är godtyckliga. Visa att*

$$u(x,y) = f(x + e^y) + g(x - e^y)$$

är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (4p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= f'(x + e^y) + g'(x - e^y), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(x + e^y) + g''(x - e^y), \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= f'(x + e^y) \cdot e^y - g'(x - e^y) \cdot e^y, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f''(x + e^y) \cdot e^{2y} + f'(x + e^y) \cdot e^y + g''(x - e^y) \cdot e^{2y} - g'(x - e^y) \cdot e^y,
\end{aligned}$$

Därmed övergår ekvationen i

$$e^{2y}(f'' + g'') - f'' \cdot e^{2y} - f' \cdot e^{y} - g'' \cdot e^{2y} + g' \cdot e^{y} + f' \cdot e^{y} - g' \cdot e^{y} = 0.$$

6. *Kurvan γ definieras som skärningen mella ytorna*

$$F := x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

och

$$G := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0.$$

Verifiera först att punkten $(1, 1, 1)$ ligger på γ, och bestäm sedan ekvationen för γ's tangentlinje i denna punkt. (4p)

Lösning: $F(1, 1, 1) = 0,\ G(1, 1, 1) = 0 \Longrightarrow (1, 1, 1) \in \gamma$. Tangentens riktningsderivata är en multipel av $\operatorname{grad} F(1, 1, 1) \times \operatorname{grad} G(1, 1, 1)$, där

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} F &= 2(x, -y, -z) \Longrightarrow \operatorname{grad} F(1, 1, 1) = 2(1, -1, -1), \\ \operatorname{grad} G &= 2(x, 2y, 3z) \Longrightarrow \operatorname{grad} G(1, 1, 1) = 2(1, 2, 3). \end{aligned}$$

Eftersom

$$(1, -1, -1) \times (1, 2, 3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1, -4, 3)$$

kan vi ta $(1, 4, -3)$ som tangentens riktningsvektor, och då ges tangentlinjen av

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t \cdot (1, 4, -3), \quad -\infty < t < \infty.$$

7. *Låt P vara parallellogrammen med hörnpunkter i $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$ och $(3, -1)$. Beräkna integralen*

$$I = \iint_P (2x^2 + 5xy - 3y^2) e^{(2x-y)^2}\, dxdy.$$

Ledning: Variabeltransformation! (4p)

Lösning: Linjen genom $(0, 0)$ och $(1, 2)$ har ekvationen $y = 2x \iff 2x - y = 0$; linjen genom $(3, -1)$ och $(4, 1)$ har ekvationen $y + 1 =$

$2(x-3) \iff 2x-y=7$, linjen genom $(0,0)$ och $(3,-1)$ har ekvationen $y=-1/3\,x \iff x+3y=0$; linjen genom $(1,2)$ och $(4,1)$ har ekvationen $y-2=-1/3\,(x-1) \iff x+3y=7$. Så under variabeltransformationen

$$\begin{cases} u = 2x - y, \\ v = x + 3y \end{cases}$$

övergår parallellogrammen P i kvadraten K definierad av $0 \le u \le 7$ och $0 \le v \le 7$ – en klar förenkling! Nu är

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

så

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}(3u + v), \\ y = \frac{1}{7}(-u + 2v), \end{cases}$$

vilket ger funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{vmatrix} = \frac{6+1}{49} = \frac{1}{7},$$

och därmed blir

$$dx\,dy = \frac{1}{7}\,du\,dv.$$

Vidare är

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy - 3y^2 &= \frac{1}{49}(2(3u+v)^2 + 5(3u+v)(-u+2v) - 3(-u+2v)^2) \\ &= \cdots = uv. \end{aligned}$$

Därmed blir

$$\begin{aligned} I &= \int_{u=0}^{7} \int_{v=0}^{7} uv \cdot e^{u^2} \cdot \frac{1}{7}\,dudv = \frac{1}{7} \int_0^7 e^{u^2} u\,du \cdot \int_0^7 v\,dv \\ &= \frac{1}{7} \left[\frac{1}{2} e^{u^2} \right]_0^7 \cdot \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^7 = \frac{1}{28} \left(e^{49} - 1 \right) \cdot 49 = \frac{7}{4} \left(e^{49} - 1 \right). \end{aligned}$$

8. *Kurvan* γ *i* xy*-planet börjar i punkten* $(1, 0)$ *och följer först linjen* $y = 1 - x$ *till* $(0, 1)$*, fortsätter sedan längs cirkeln* $x^2 + y^2 = 1$ *till* $(-1, 0)$*, därifrån längs linjen* $y = -x - 1$ *till* $(0, -1)$ *och till slut längs cirkeln* $x^2 + y^2 = 1$ *tillbaka till* $(1, 0)$*. Beräkna kurvintegralen*

$$I = \oint_\gamma x(x^2 + y^2)\,dx + (2x + x^2y + y^3)\,dy. \qquad (4\text{p})$$

Lösning: Låt D vara insidan av kurvan γ. Med hjälp av Greens formel och en FIGUR ser man att

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x + x^2y + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2) \right) dxdy \\ &= \iint_D (2 + 2xy - 2xy)\,dxdy = 2 \cdot (\text{arean av } D) \\ &= \text{arean av enhetsskivan} + 2 \cdot \text{arean av enhetskvadranten} \\ &= \pi + 2. \end{aligned}$$