Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1148 Flervariabelanalys för E1,
07–06–07, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 14–18 poäng ger betyget 3, 19–24 poäng ger betyget 4, och 25–28 poäng ger betyget 5.
- Om du har fått 13 poäng så har du möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall.

1. Visa att funktionen
$$f(x,y) = \begin{cases} (2x-5y)\ln(x^2+y^2) & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
är kontinuerlig i origo. (3p)

2. Bestäm alla lokala maxima och minima för funktionen
$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2. \qquad (3p)$$

3. Beräkna funktionen
$$F(a) = \int_{x=0}^{a} \left(\int_{y=x}^{a} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx$$
då $a > 0$. (3p)

4. Bestäm det största och det minsta värdet som funktionen
$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$
antar på den slutna cirkelskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$. (3p)

5. Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara funktioner som har kontinuerliga andraderivator, men som i övrigt är godtyckliga. Visa att

$$u(x, y) = f(x + e^y) + g(x - e^y)$$

är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad \text{(4p)}$$

6. Kurvan γ definieras som skärningen mella ytorna

$$F := x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

och

$$G := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0.$$

Verifiera först att punkten $(1, 1, 1)$ ligger på γ, och bestäm sedan ekvationen för γ's tangentlinje i denna punkt, (4p)

7. Låt P vara parallellogrammen med hörnpunkter i $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$ och $(3, -1)$. Beräkna integralen

$$I = \iint_P (2x^2 + 5xy - 3y^2)e^{(2x-y)^2}\, dxdy.$$

Ledning: Variabeltransformation! (4p)

8. Kurvan γ i xy-planet börjar i punkten $(1, 0)$ och följer först linjen $y = 1 - x$ till $(0, 1)$, fortsätter sedan längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ till $(-1, 0)$, därifrån längs linjen $y = -x - 1$ till $(0, -1)$ och till slut längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ tillbaka till $(1, 0)$. Beräkna kurvintegralen

$$I = \oint_\gamma x(x^2 + y^2)\, dx + (2x + x^2 y + y^3)\, dy. \qquad \text{(4p)}$$

Lycka till!
Olle.