Lösningsförlag till Tentamenskrivning, 5B1148, flervariabelanalys för IT och ME (5p)
2007-08-24

1. Vi har $z(x,y) = f(2x + 3y, 2x - 3y)$, $u = 2x + 3y$ och $v = 2x - 3y$. Enligt kedjeregeln får man
$z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2f'_u + 2f'_v$ och
$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2f'_u + 2f'_v)'_u u'_y + (2f'_u + 2f'_v)'_v v'_y = 3(2f''_{uu} + 2f''_{vu}) - 3(2f''_{uv} + 2f''_{vv})$

$\boxed{\textbf{Svar: } 6f''_{uu} - 6f''_{vv}.}$

---

2. f är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.
Kritiska punkter fås ur $\nabla f = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 16x^3 - 2y - 14x = 0 \\ f_y = -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x^3 - 16x = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) = \\ (0,0),(1,1),(-1,-1) \end{cases}$$

Vi har $A = f''_{xx} = 48x^2 - 14$, $B = f''_{xy} = -2$, $C = f''_{yy} = 2$ och hessianen är $\begin{pmatrix} 48x^2 - 14 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Man får:

I(0,0) är hessianen $\begin{pmatrix} -14 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärdena

$$\det\begin{pmatrix} -14-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(14+\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{68}$$

som har olika teckenÞ en sadelpunktpunkt.

I (1,1) är hessianen $\begin{pmatrix} 34 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$$\det\begin{pmatrix} 34-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (34-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 18 \pm \sqrt{162}$$

som båda är positiva är Þ en lokal minimipunkt.

I (–1,–1) är hessianen $\begin{pmatrix} 34 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ med egenvärderna

$$\det\begin{pmatrix} 34-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (34-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 18 \pm \sqrt{162}$$

som båda är positiva är Þ en lokal minimipunkt

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Lokal minimum i } (1,1) \text{ och } (-1,-1).}$

---

3. Paraboloiderna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 3x^2 + 4y^2 \\ z = 2x^2 + 3y^2 + 4 \end{cases}$

Kurvans projektion på xy-planet ges av $3x^2 + 4y^2 = 2x^2 + 3y^2 + 4$, vilket beskriver cirkeln $x^2 + y^2 = 4$. Kroppens projektionen D på xy-planet är cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 4$. Den sökta volymen är

$$\iint_D \left(2x^2+3y^2+4-3x^2-4y^2\right)dxdy = \iint_D \left(4-x^2-y^2\right)dxdy$$

Polära koordinater $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ ger

$$\iint_D \left(4-x^2-y^2\right)dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\int_{r=0}^{2}\left(4-r^2\right)rdr\right]d\theta = 8\pi$$

4. Om vi låter $P = \dfrac{2x}{x^2+y}+1$ och $Q = \dfrac{1}{x^2+y}+1$ så får vi att

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}$ och $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}$. Alltså är differentialen $Pdx+Qdy$ exakt i hela $\mathbf{R}^2$ utom i origo, ty där är derivatorna singulära. En ekvivalent utsaga är att fältet (P,Q) är konservativt i hela $\mathbf{R}^2$ utom i origo .Eftersom den givna kurvan inte omsluter origo kan vi utnyttja att det enligt satsen (10.3) om konservativa fält existerar en potential $U(x,y)$ till fältet (P,Q) så att $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ och

$Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$. Vi har alltså att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P = \dfrac{2x}{x^2+y}+1 & (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q = \dfrac{1}{x^2+y}+1 & (2) \end{cases}$$

Integration av (1) med avseende på x ger

$$U = \int\left(\frac{2x}{x^2+y}+1\right)dx = \ln\left(x^2+y\right)+x+\Psi(y) \quad (3)$$

där Ψ är någon kontinuerlig och deriverbar funktion av y.
Derivation av (3) med avseende på y samt jämförelse med (2) ger

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y}+\Psi'(y) = \lceil(2)\rceil = \frac{1}{x^2+y}+1 \Rightarrow \Psi' = 1 \Rightarrow \Psi = y+C$$

Potentialen till (P,Q) är alltså $U = \ln(x^2+y)+x+y+C$ och den sökta integralen kan nu beräknas enligt

$$\int_\Gamma \left(\frac{2x}{x^2+y}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x^2+y}+1\right)dy = U(1,0)-U(-1,0) =$$
$$= \ln 1+1+0-\ln 1+1+0 = 2$$

5. Funktionen $f(x,y) = 6+x^2-3y^2-3\ln(1+x^2+y^2)$ är kontinuerlig och mängden $x^2+y^2 \le 1$ är kompakt. En kontinuerlig funktion antar i ett kompakt område sitt minsta och största värde. Värdemängden = intervallet [minsta värde, största värde].

Det största resp. minsta värde antas antingen i en kritisk inre punkt, eller i en randpunkt.

<u>Inre punkter:</u> $x^2+y^2 < 1$. Kritiska punkter fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 2x - \dfrac{6x}{1+x^2+y^2} = 0 \\ f'_y = -6y - \dfrac{6y}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases} \text{ ger } \begin{cases} 2x\left(1 - \dfrac{3}{1+x^2+y^2}\right) = 0 \\ 6y\left(-1 - \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\right) = 0 \end{cases}$$

ger $\begin{cases} x = 0 \quad \text{eller} \quad x^2+y^2 = 2 \\ y = 0 \quad \text{eller} \quad x^2+y^2 = -2 \end{cases}$

Vi får

$x = 0$, $y = 0$ eller $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$. Av punkterna $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2},0)$ ligger endast $(0,0)$ i mängden $x^2 + y^2 < 1$ och vi har $f(0,0) = 6$.

Randpunkter: $x^2 + y^2 = 1$.

$f(x,y) = 6 + x^2 - 3y^2 - 3\ln(1 + x^2 + y^2) = \{x^2 = 1 - y^2\} = 7 - 3\ln 2 - 4y^2 = g(y)$, där $0 \le y^2 \le 1$. Funktionen g antar ett minsta värde $g(\pm 1) = 3 - 3\ln 2$ och ett största värde $g(0) = 7 - 3\ln 2$.

Enligt ovanstående finns f:s största resp. minsta värde bland talen 6, $3 - 3\ln 2$ och $7 - 3\ln 2$, alltså

Svar: Värdemängden = intervallet $[3 - 3\ln 2, 6]$.

6. $$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow dxdy = rdrd\theta\right] = \lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2+1}\,rdrd\theta =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{r}{1+r^2}[\theta]_0^{\pi/2}dr = \frac{\pi}{2}\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{r}{1+r^2}dr = \frac{\pi}{2}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+R^2\right) = \infty$$

Svar: Volymen är inte ändlig

7. Projektionen av kroppen på xy-planet ges av $x^2 + y^2 \le 1$.

$$M(\Omega) = \iiint_\Omega z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z\,dz\right]dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)\right]dxdy$$

Använd polära koordinater

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)\right]dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, dxdy = rdrd\theta\right] = \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)drd\theta = 2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)dr = \frac{2\pi}{3}$$

Svar: Massan av kroppen ges av $\dfrac{2\pi}{3}$ m.e

8 sätt $F(x,y,z) = xf\left(\dfrac{y}{x}\right) - z$. Då gäller att det plan som tangerar ytan i punkten (a,b,c) ges av

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0, \text{ där } c = af\left(\frac{b}{a}\right).$$

Vi får

$$\left[f\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}f'\left(\frac{b}{a}\right)\right](x-a)+f'\left(\frac{b}{a}\right)(y-b)-\left(z-af\left(\frac{b}{a}\right)\right)=0 \quad (*)$$

Om vi sätter $x=y=z=0$ i vänstra ledet av(*) fås

$$\left[f\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}f'\left(\frac{b}{a}\right)\right](0-a)+f'\left(\frac{b}{a}\right)(0-b)-\left(0-af\left(\frac{b}{a}\right)\right)=$$

$$-af\left(\frac{b}{a}\right)+bf'\left(\frac{b}{a}\right)-bf'\left(\frac{b}{a}\right)+af\left(\frac{b}{a}\right)=0$$

Dvs alla plan går genom origo i $\mathbb{R}^3$

Svar: alla tangentplan går genom origo.