KTH Matematik,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till SF1626 Flervariabelanalys för E1, 08–03–14, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.

1. (a) Beräkna riktningsderivatan av funktionen

$$f(x, y) = \frac{x + 6y}{x + y}$$

i punkten $(1, 0)$ och i den riktning som ges av vektorn $\boldsymbol{v} = (4, 3)$.

(2p)

(b) Finns det någon riktning $\boldsymbol{u}$ så att riktningsderivatan i $(1, 0)$ och $\boldsymbol{u}$:s riktning är lika med 6? (1p)

LÖSNING: (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-5y}{(x+y)^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5x}{(x+y)^2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{grad} f = \frac{5}{(x+y)^2}(-y, x) \Longrightarrow \operatorname{grad} f\,(1,0) = (0,5);$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(4,3)}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}(4,3)$$

$$\Longrightarrow f'_{\boldsymbol{e}}(1,0) = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{e} = (0,5) \cdot \frac{(4,3)}{5} = 3.$$

(b) $f'_{\boldsymbol{e}}(1,0)$ är störst då $\boldsymbol{e} = \operatorname{grad} f(1,0)/|\operatorname{grad} f(1,0)| = (0,5)/5 = (0,1) \Longrightarrow (f'_{\boldsymbol{e}})_{\max} = (0,5) \cdot (0,1) = 5 < 6$. SVAR: Nej.

2. (a) Visa att punkten $(1,2)$ ligger på kurvan $F(x,y) := 4x^4 - 5x^2y^2 + y^4 = 0$ och att man nära denna punkt kan lösa ut y som en funktion av x:

$$F(x,y) = 0 \Longrightarrow y = y(x) \quad \text{då } (x,y) \approx (1,2).$$

Beräkna sedan $y'(1)$ med hjälp av implicit derivering. (2p)

(b) $F(x,y) = 0$ kan betraktas som en andragradsekvation med avseende på y^2. Använd detta för att bestämma funktionen $y = y(x)$ i (a)-uppgiften explicit. (1p)

LÖSNING: (a) $F(1,2) = 4 - 5 \cdot 4 + 16 = 0 \iff (1,2)$ ligger på kurvan.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -10x^2y + 4y^3 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -20 + 32 \neq 0 \Longrightarrow \text{ kan lösa ut } y:$$

$y = y(x)$. d/dx på $0 = F(x, y(x)) = 4x^4 - 5x^2y^2(x) + y^4(x) \Longrightarrow 0 = 16x^3 - 10x \cdot y^2(x) - 5x^2 \cdot 2y(x) \cdot y'(x) + 4y^3(x) \cdot y'(x)$. $x = 1$, $y = 2$ insatt i detta ger $0 = 16 - 40 - 20y'(1) + 32y'(1) \Longrightarrow 12y'(1) = 24 \iff y'(1) = 2$.

(b) $$(y^2)^2 - 5x^2 \cdot y^2 + 4x^4 = 0 \iff y^2 = \frac{5x^2}{2} \pm \sqrt{\frac{25x^4 - 16x^4}{4}}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2}x^2 = \begin{cases} 4x^2 \\ x^2 \end{cases} \iff y = \begin{cases} \pm 2x \\ \pm x. \end{cases}$$

Den funktion $y = y(x)$ som uppfyller $y(1) = 2$ är tydligen $y = 2x$ – som har derivatan lika med 2.

3. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av de räta linjerna $y = x$, $y = x - 1$, $y = 0$ och $y = 1$. Skissera D och beräkna sedan integralen

$$I = \iint_D (2x - y)\, dxdy. \qquad (3p)$$

LÖSNING: Skisserar man området ser man att det är lättast att integrera med avseende på x först och sedan med avseende på y:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y}^{x=y+1} (2x - y)\, dx \right) dy == \int_{y=0}^{1} \left(\left[x^2 - xy \right]_{x=y}^{x=y+1} \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{1} (y^2 + 2y + 1 - y^2 - y - y^2 + y^2)\, dy = \int_{y=0}^{1} (y + 1)\, dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_0^1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

4. Låt T vara det triangulära området med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$, och låt γ vara den positivt orienterde randen av T. Beräkna kurvintegralen

$$I = \oint_\gamma (x^2 + y^2)\, dx + (x + 2)\, dy. \qquad (3p)$$

LÖSNING: $P = x^2 + y^2$, $Q = x + 2 \Longrightarrow \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1 - 2y$. Så Green säger att

$$\begin{aligned}
I &= \iint_T (1 - 2y)\, dxdy = \int_{y=0}^{1} (1 - 2y) \left(\int_{x=0}^{1-y} dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{1} (1 - 2y) \cdot (1 - y)\, dy = \int_0^1 (1 - 3y + 2y^2)\, dy \\
&= \left[y - \frac{3}{2} y^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6 - 9 + 4}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

5. (a) Visa att variabelbytet

$$\begin{cases} x = r\, \cos\phi, \\ y = r\, \sin\phi, \end{cases} \qquad \text{där} \quad 0 \le \phi < 2\pi,\ r > 0,$$

gör att

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{övergår i} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi}. \qquad \text{(2p)}$$

(b) Bestäm allmänna lösningen till den partiella diffrentialekvationen

$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy. \qquad \text{(2p)}$$

LÖSNING: (a) $f(x, y) = f(r\cos\phi, r\sin\phi) \Longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-r\sin\phi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r\cos\phi = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(b) $$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \iff \frac{\partial f}{\partial \phi} = 2r^2\cos\phi\sin\phi = r^2\sin 2\phi$$

$$\Longrightarrow f = -\frac{1}{2}r^2\cos 2\phi + g(r) = -\frac{1}{2}(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + g(r)$$

$$= \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + g(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

där g är en godtycklig deriverbar envariabelsfunktion.

6. Beräkna Taylorpolynomet av andra graden till funktionen $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ omkring punkten $(1, 1)$, och använd sedan detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av funktionen f i punkten $(1,1,\ 1,2)$. (4p)

LÖSNING: Med $(x, y) = (1 + h, 1 + k)$ säger Taylor att

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f(1 + h, 1 + k) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot k + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) \cdot k^2\right) \\ &+ \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3\right). \end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned}
&f(1,1) = 1 + \sin 0 = 1;\\
&\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos(x-y) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 + 1 = 2;\\
&\frac{\partial f}{\partial y} = x - \cos(x-y) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1 - 1 = 0;\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x-y) \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(1,1) = 0;\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + \sin(x-y) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1;\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x-y) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0,
\end{aligned}$$

så att

$$f(1+h, 1+k) = 1 + 2h + hk + \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3\right) \iff$$

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) + (x-1)(y-1) + \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)^3\right)$$

och $\quad f(1+0,1,\ 1+0,2) \approx 1 + 2\cdot 0,1 + 0,1\cdot 0,2 = 1,22.$

7. Låt D vara det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $xy = 1$ och $xy = 2$ samt av de räta linjerna $y = x$ och $y = 4x$.

   Skissera D och beräkna sedan integralen

   $$I = \iint_D x^2y^2\, dxdy.$$

   LEDNING: Inför t. ex. de nya variablerna $u = xy$ och $v = y/x$. (4p)

   LÖSNING: Genom variabelbytet övergår området i rektangeln $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 4$ i uv-planet. Och

   $$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{dudv}{\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|},$$

   där

   $$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \det\begin{pmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial y & \partial v/\partial y\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y & x\\ -y/x^2 & 1/x\end{pmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v.$$

Därmed blir

$$I = \iint_D x^2y^2\,dxdy = \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{4} u^2 \cdot \frac{1}{2v}\,dudv$$
$$= \frac{1}{2}\int_{u=1}^{2} u^2\,du \cdot \int_{v=1}^{4} \frac{1}{v}\,dv = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^2 \cdot [\ln v]_1^4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8-1}{3}\ln 4 = \frac{7\ln 2}{3}.$$

8. Låt $f_a(x,y) = a^2e^{x-y} - a(x-y) + xy$, där a är en parameter, medan x och y är hederliga variabler. För vilket eller vilka värden på a har $f_a(x,y)$ ett lokalt minimivärde i origo? Förklara! (4p)

LÖSNING:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \Longrightarrow$$
$$f_a(x,y) = a^2\left(1 + (x-y) + \frac{1}{2}(x-y)^2 + \ldots\right) - a(x-y) + xy$$
$$= a^2 + (a^2-a)x - (a^2-a)y + \left(\frac{a^2}{2}x^2 - (a^2-1)xy + \frac{a^2}{2}y^2\right) + \ldots,$$

så $(0,0)$ är en kritisk punkt $\Longleftrightarrow$ $a(a-1)=0$ $\Longleftrightarrow$ $a=0$ eller $a=1$.

$a = 0 \Longrightarrow f_0(x,y) = xy + \ldots \Longrightarrow$ sadelpunkt i $(0,0)$;

$a = 1 \Longrightarrow f_1(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \cdots \geq 1$ då $(x,y) \approx (0,0) \Longrightarrow$

lokalt minimum i $(0,0)$.