KTH Matematik,
Olle Stormark.

Tentamen i SF1626 Flervariabelanalys för E1,
08–03–14, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.

1. (a) Beräkna riktningsderivatan av funktionen

$$f(x, y) = \frac{x + 6y}{x + y}$$

i punkten $(1, 0)$ och i den riktning som ges av vektorn $\boldsymbol{v} = (4, 3)$. (2p)

(b) Finns det någon riktning $\boldsymbol{u}$ så att riktningsderivatan i $(1, 0)$ och $\boldsymbol{u}$:s riktning är lika med 6? (1p)

2. (a) Visa att punkten $(1, 2)$ ligger på kurvan

$$F(x, y) := 4x^4 - 5x^2y^2 + y^4 = 0,$$

och att man nära denna punkt kan lösa ut y som en funktion av x:

$$F(x, y) = 0 \Longrightarrow y = y(x) \quad \text{då } (x, y) \approx (1, 2).$$

Beräkna sedan $y'(1)$ med hjälp av implicit derivering. (2p)

(b) $F(x, y) = 0$ kan betraktas som en andragradsekvation med avseende på y^2. Använd detta för att bestämma funktionen $y = y(x)$ i (a)-uppgiften explicit. (1p)

3. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av de räta linjerna $y = x$, $y = x - 1$, $y = 0$ och $y = 1$. Skissera D och beräkna sedan integralen
$$I = \iint_D (2x - y)\,dxdy. \qquad (3p)$$

4. Låt T vara det triangulära området med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$, och låt γ vara den positivt orienterde randen av T. Beräkna kurvintegralen
$$I = \oint_\gamma (x^2 + y^2)\,dx + (x + 2)\,dy. \qquad (3p)$$

5. (a) Visa att variabelbytet
$$\begin{cases} x = r\,\cos\phi, \\ y = r\,\sin\phi, \end{cases} \qquad \text{där} \quad 0 \le \phi < 2\pi,\ r > 0,$$
gör att
$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{övergår i} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi}. \qquad (2p)$$

(b) Bestäm allmänna lösningen till den partiella diffrentialekvationen
$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy. \qquad (2p)$$

6. Beräkna Taylorpolynomet av andra graden till funktionen $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ omkring punkten $(1, 1)$, och använd sedan detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av funktionen f i punkten $(1,1,\ 1,2)$.

(4p)

7. Låt D vara det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $xy = 1$ och $xy = 2$ samt av de räta linjerna $y = x$ och $y = 4x$.

Skissera D och beräkna sedan integralen
$$I = \iint_D x^2y^2\,dxdy.$$

LEDNING: Inför t. ex. de nya variablerna $u = xy$ och $v = y/x$. (4p)

8. Låt $f_a(x, y) = a^2e^{x-y} - a(x - y) + xy$, där a är en parameter, medan x och y är hederliga variabler. För vilket eller vilka värden på a har $f_a(x, y)$ ett lokalt minimivärde i origo? Förklara! (4p)

Lycka till!
Olle.