KTH Matematik,
Olle Stormark.

**Lösningsförslag till tentamen i SF1626 Flervariabelanalys för E1, 08–05–29, kl. 8.00–13.00.**

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning $i$ (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal $i$.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.

1. Kontrollera först att punkten $(5, -2, 3)$ ligger på ytan

$$xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14,$$

och bestäm sedan ytans tangentplan i denna punkt. (3p)

**Lösning:** Punkten ligger verkligen i ytan eftersom

$$5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5^2 - 2(-2)^2 + 3^3 = -30 + 25 - 8 + 27 = 14.$$

Normalvektorn fås med hjälp av gradienten:

$$\operatorname{grad}(xyz + x^2 - 2y^2 + z^3) = (yz + 2x, xz - 4y, xy + 3z^2),$$

som i punkten $\boldsymbol{r}_0 = (5, -2, 3)$ blir $\boldsymbol{n} = (4, 23, 17)$. Tangentplanet i $\boldsymbol{r}_0$ ges av $\boldsymbol{n} \bullet (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$, det vill säga i vårt fall

$$(4, 23, 17) \bullet (x - 5, y + 2, z - 3) = 0 \iff 4x + 23y + 17z = 25.$$

2. (a) Visa att $f(x, y) = x \cdot e^{x-y^2}$ har en enda kritisk punkt – nämligen $(-1, 0)$. (1p)

**Lösning:** I kritiska punkter är $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Här fås

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (1 + x) \cdot e^{x-y^2} \iff x + 1 = 0,$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy \cdot e^{x-y^2} \iff xy = 0.$$

Första ekvationen ger att $x = -1$, varpå insättning i den andra visar att $y = 0$.

(b) Taylorutveckla $f(x,y)$ omkring $(-1,0)$ till och med andra ordningen och ange resttermens storleksordning. (1p)

**Lösning:** Nära $(-1,0)$ sätts $x=-1+h$, $y=k$, där $h,k\approx 0$. Då blir

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(-1+h,k) = (-1+h)\cdot e^{-1+h-k^2} = e^{-1}\cdot(-1+h)\cdot e^{h-k^2}\\
&= \left\{ \text{eftersom} \quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \right\}\\
&= e^{-1}\cdot(-1+h)\cdot\left(1+h-k^2+\frac{1}{2}(h-k^2)^2+\dots\right)\\
&= e^{-1}\cdot(-1+h)\left(1+h-k^2+\frac{1}{2}h^2+\dots\right)\\
&= e^{-1}\cdot\left(-1-h+k^2-\frac{1}{2}h^2+\dots+h+h^2+\dots\right)\\
&= e^{-1}\cdot\left(-1+\frac{1}{2}h^2+k^2+\dots\right) = e^{-1}\cdot\left(-1+\frac{1}{2}(x+1)^2+y^2+\dots\right),
\end{aligned}$$

där $\dots$ står för termer av ordning $\geq 3$. Så

$$f(-1+h,k) = e^{-1}\cdot\left(-1+\frac{1}{2}h^2+k^2\right)+\mathcal{O}\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3\right).$$

(c) Använd (b) för att bestämma den kritiska punktens karaktär (lokalt max eller lokalt min eller sadelpunkt eller ...). (1p)

**Lösning:** $\frac{1}{2}h^2+k^2>0$ då $(h,k)\neq(0,0) \implies (-1,0)$ är en lokal minimipunkt.

3. Låt $T$ vara den triangel vars hörn ligger i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$. Beräkna dubbelintegralen

$$I = \iint_T \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^2}. \qquad \text{(3p)}$$

**Lösning:** Triangelns sneda sidor ges av $y=x \iff x=y$ och $y=2-x \iff x=2-y$. Så om man först integrerar med avseende på $x$ och sedan med avseende på $y$ så fås

$$\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y}^{2-y}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{1}\left[\frac{-1}{1+x+y}\right]_{x=y}^{x=2-y}\\
&= \int_{y=0}^{1}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+2y}\right)dy = \left[\frac{-y}{3}+\frac{1}{2}\ln(1+2y)\right]_0^1\\
&= \frac{\ln 3}{2}-\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

4. Förklara varför funktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ har ett största och ett minsta värde på ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$, och beräkna sedan dessa värden. (3p)

**Lösning:** Eftersom ellipsoiden är sluten och begränsad (det vill säga kompakt) och $f$ är kontinuerlig så finns verkligen ett största och ett minsta värde − som man till exempel kan beräkna med hjälp av Lagranges multiplikatormetod.

Med $f = x + y + z$ och $g = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36$ blir Lagrangesystemet

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f - \lambda \operatorname{grad} g, \\ g = 0 \end{cases}$$

i detta fall lika med

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x, \\ 1 = \lambda \cdot 8y, \\ 1 = \lambda \cdot 18z, \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36. \end{cases}$$

Den första ekvationen visar att $x$ och $\lambda$ är $\neq 0$.

$$\frac{\text{2:a ekv.}}{\text{1:a ekv.}} \Longrightarrow \frac{4y}{x} = 1 \Longrightarrow y = \frac{x}{4}, \quad \frac{\text{3:e ekv.}}{\text{1:a ekv.}} \Longrightarrow \frac{9z}{x} = 1 \Longrightarrow z = \frac{x}{9};$$

insättning i den sista ekvationen ger sedan

$$x^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = 36 \iff x^2 \cdot \frac{36 + 9 + 4}{36} = 36 \iff x^2 = \frac{36^2}{7^2}$$

$$\iff x = \pm\frac{36}{7} \Longrightarrow y = \pm\frac{9}{7} \text{ och } z = \pm\frac{4}{7} \Longrightarrow \text{ punkterna } \pm\frac{1}{7}(36, 9, 4).$$

Plustecknet ger det största värdet $\frac{36+9+4}{7} = 7$, och minustecknet ger det minsta värdet -7.

5. Låt $F$ vara en deriverbar 2-variabelsfunktion och låt $k$ vara en konstant. Visa att funktionen

$$u(x, y, z) = x^k \cdot F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

är en lösning till differentialekvationen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = k\,u$$

då $x \neq 0$. (4p)

**Lösning:** Med $F = F(s,t)$, där i vårt fall $s = z/x$ och $t = y/x$, så fås

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \cdot x^{k-1} \cdot F + x^k \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{-z}{x^2} + x^k \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{-y}{x^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^k \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{1}{x} = x^{k-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^k \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{1}{x} = x^{k-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Insatt i differentialekvationen ger detta

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = k \cdot x^k \cdot F - x^{k-1} \cdot z \cdot \frac{\partial F}{\partial s} - x^{k-1} \cdot y \cdot \frac{\partial F}{\partial t}$$
$$+ y \cdot x^{k-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + z \cdot x^{k-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial s} = k \cdot x^k \cdot F = k \cdot u.$$

6. Låt $F(x,y,z)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion med egenskapen att alla tre partiella derivatorna $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z$ är skilda från noll i en viss punkt $(a,b,c)$. Enligt implicita funktionssatsen kan då $F$:s nivåyta genom $(a,b,c)$ lokalt uppfattas som grafen av 2-variabelsfunktioner av formen

$$z = z(x,y), \quad y = y(x,z) \quad \text{och} \quad x = x(y,z).$$

Visa att dessa tre funktioner uppfyller ”Barkhausens rörformel”

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

(Denna formel förekommer i teorien för elektronrör.) (4p)

**Lösning:** Differentiering av $F(x,y,z) = F(a,b,c)$ ger

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0.$$

Om $\partial F/\partial z \neq 0$ så kan $dz$ lösas ut:

$$dz = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}\,dx - \frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}\,dy,$$

varur man ser att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{ koefficienten framför } dx = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}.$$

På samma sätt ser man att

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}.$$

Detta ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = \left(-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}\right) \cdot \left(-\frac{\partial F/\partial z}{\partial F/\partial y}\right) \cdot \left(-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}\right) = (-1)^3 = -1.$$

7. Kroppen $K$ definieras av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Beräkna $K$:s massa om densiteten är $\rho(x, y, z) = x^2$. (4p)

**Lösning:** I de sfäriska koordinaterna $r$, $\theta$ och $\phi$ definieras $K$ av olikheterna $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Vidare är densiteten $= x^2 = r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi$ och $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$, vilket ger massan

$$\begin{aligned}
m &= \int_{r=1}^{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{\pi/2} r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi \cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\,d\phi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta \cdot \int_1^2 r^4\,dr \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi\right) d\phi \cdot \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta) \cdot \sin\theta\,d\theta \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi\right]_0^{\pi/2} \cdot \int_1^0 (1 - u^2)\,(-du) \cdot \frac{32 - 1}{5} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 \cdot \frac{31}{5} = \frac{31\pi}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{31\pi}{30}.
\end{aligned}$$

8. Låt kurvan $\gamma$ vara den övre halvan av ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

från punkten $(-2, 0)$ till punkten $(2, 0)$. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\,dy\right). \qquad \text{(4p)}$$

**Lösning:**

$$\begin{aligned}
&P = \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \\
&\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - (x + y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) - (x - y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= (x^2 + y^2)^{-2} \cdot (x^2 + y^2 - 2x^2 - 2xy + x^2 + y^2 + 2xy - 2y^2) = 0
\end{aligned}$$

då $(x, y) \neq (0, 0)$.

Om $c$ är en kurva från $(2, 0)$ till $(-2, 0)$ så att origo *inte* ligger innanför eller på den slutna kurvan $\gamma + c$, så visar $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0$ och Greens formel att

$$\oint_{\gamma + c} P\,dx + Q\,dy = 0, \quad \text{så att} \quad \oint_\gamma P\,dx + Q\,y = -\oint_c P\,dx + Q\,dy.$$

Låt oss välja $c$ som den övre halvan av cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ från $(2, 0)$ till $(-2, 0)$. $c$ har parametriseringen

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos\phi \\ y &= 2\sin\phi \end{aligned}\right\}, \quad \text{där} \quad \phi\colon 0 \to \pi,$$

vilket ger att $dx = -2\sin\phi\, d\phi$ och $dy = 2\cos\phi\, d\phi$. Därmed blir

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma P\, dx + Q\, dx = -\int_c P\, dx + Q\, dy \\
&= -\int_{\phi=0}^{\pi} \left( \frac{2(\cos\phi - \sin\phi) \cdot (-2\sin\phi)}{4} + \frac{2(\cos\phi + \sin\phi) \cdot 2\cos\phi}{4} \right) d\phi \\
&= \int_0^\pi \left( (\cos\phi - \sin\phi) \cdot \sin\phi - (\cos\phi + \sin\phi) \cdot \cos\phi \right)\, d\phi \\
&= \int_0^\pi (\cos\phi \sin\phi - \sin^2\phi - \cos^2\phi - \sin\phi\cos\phi)\, d\phi = -\int_0^\pi d\phi = -\pi.
\end{aligned}$$