KTH Matematik,
Olle Stormark.

Tentamen i SF1626 Flervariabelanalys för E1,
08–05–29, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.

1. Kontrollera först att punkten $(5, -2, 3)$ ligger på ytan
$$xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14,$$
och bestäm sedan ytans tangentplan i denna punkt. (3p)

2. (a) Visa att $f(x, y) = x \cdot e^{x-y^2}$ har en enda kritisk punkt − nämligen $(-1, 0)$. (1p)
   (b) Taylorutveckla $f(x, y)$ omkring $(-1, 0)$ till och med andra ordningen och ange resttermens storleksordning. (1p)
   (c) Använd (b) för att bestämma den kritiska punktens karaktär (lokalt max eller lokalt min eller sadelpunkt eller ...). (1p)

3. Låt T vara den triangel vars hörn ligger i punkterna $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(1, 1)$. Beräkna dubbelintegralen
$$I = \iint_T \frac{dx\,dy}{(1 + x + y)^2}. \qquad \text{(3p)}$$

4. Förklara varför funktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ har ett största och ett minsta värde på ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$, och beräkna sedan dessa värden. (3p)

5. Låt F vara en deriverbar 2-variabelsfunktion och låt k vara en konstant. Visa att funktionen

$$u(x, y, z) = x^k \cdot F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

är en lösning till differentialekvationen

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + z\,\frac{\partial u}{\partial z} = k\,u$$

då $x \neq 0$. (4p)

6. Låt $F(x, y, z)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion med egenskapen att alla tre partiella derivatorna $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ och $\partial F/\partial z$ är skilda från noll i en viss punkt (a, b, c). Enligt implicita funktionssatsen kan då F:s nivåyta genom (a, b, c) lokalt uppfattas som grafen av 2-variabelsfunktioner av formen

$$z = z(x, y), \quad y = y(x, z) \quad \text{och} \quad x = x(y, z).$$

Visa att dessa tre funktioner uppfyller ”Barkhausens rörformel”

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

(Denna formel förekommer i teorien för elektronrör.) (4p)

7. Kroppen K definieras av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Beräkna K:s massa om densiteten är $\rho(x, y, z) = x^2$. (4p)

8. Låt kurvan γ vara den övre halvan av ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

från punkten $(-2, 0)$ till punkten $(2, 0)$. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\right).$$ (4p)

Lycka till!
Olle.