KTH Matematik,
Olle Stormark.

Tentamen i SF1626 Flervariabelanalys för E och M
09–03–13, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta din lärare i så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3z + x^2 + yz^3 = 1$ i punkten $(1, -1, 1)$. (3p)

   Lösning: Ytan är nivåytan $F = 1$ för funktionen $F(x, y, z) = x^3z + x^2 + yz^3$. En normalvektor i $(1, -1, 1)$ fås som $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} F(1, -1, 1)$.

   $$\operatorname{grad} F = (3x^2z + 2x, z^3, x^3 + 3yz^2) \Longrightarrow \boldsymbol{n} = (5, 1, -2),$$

   varför tangentplanet ges av

   $$(5, 1, -2) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0 \iff 5x + y - 2z = 5 - 1 - 2 = 2.$$

2. Bestäm de stationära punkterna till funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, samt undersök vilka typer av stationära punkter det är fråga om. (3p)

Lösning: De stationära punkterna är lösningar till systemet

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 6x^2 - 8x + 2y, \\ 0 = \partial f/\partial y = 2x - 2y \iff y = x. \end{cases}$$

$y = x$ insatt i första ekvationen ger $0 = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) \iff$ $x = 0$ eller 1, vilket ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$.

Vidare är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Punkten $(0,0)$: $A = -8,\ B = 2,\ C = -2,\ AC - B^2 = 16 - 4 = 12;$ $A < 0$ och $AC - B^2 > 0 \Longrightarrow$ lokalt maximum.

Punkten $(1,1)$: $A = 4,\ B = 2, C = -2 \Longrightarrow AC - B^2 = -8 - 4 < 0 \Longrightarrow$ sadelpunkt.

3. Beräkna volymen av den kropp som begräsas av ytorna $z = g(x,y) = 8 - 3x^2 - y^2$ och $z = h(x,y) = x^2 + 3y^2$. (3p)

Lösning: På ytornas skärningskurva är

$$z = 8 - 3x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \Longrightarrow 8 - 4x^2 - 4y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = 2,$$

vilket visar att randen till kroppens projektion på xy-planet ges av cirkeln $x^2 + y^2 = 2$. Då $x^2 + y^2 \le 2$ är

$$g(x,y) - h(x,y) = 8 - 4(x^2 + y^2) \ge 0,$$

varför den sökta volymen ges av

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \le 2} (g(x,y) - h(x,y))\, dxdy = 4 \iint_{x^2+y^2 \le 2} (2 - (x^2 + y^2))\, dxdy \\ &= 4 \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} (2 - r^2) \cdot r\, dr d\phi = 4 \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)\, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 4[r^2 - r^4/4]_0^{\sqrt{2}} \cdot 2\pi = 8\pi \cdot (2 - 1) = 8\pi. \end{aligned}$$

4. Bestäm de punkter på kurvan $x^2 + xy + y^2 = 3$ som ligger närmast respektive längst bort från origo. (3p)

Lösning: Avståndet från origo till (x, y) är $= \delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, varför vår uppgift är att maximera/minimera $f(x, y) = \delta^2(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Lagrangesystemet ges av

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix} = 0, \\ \hfill g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Första ekvationen:

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x + y & x + 2y \end{pmatrix} &= 2x(x + 2y) - 2y(2x + y) \\ &= 2(x^2 + 2xy - 2xy - y^2) = 2(x^2 - y^2) \iff y = \pm x. \end{aligned}$$

$y = x$ insatt i andra ekvationen ger $3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1 \Longrightarrow y = \pm 1 \Longrightarrow$ punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$. I dessa är $\delta = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$y = -x$ insatt i andra ekvationen ger $x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow y = \mp\sqrt{3} \Longrightarrow$ punkterna $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ och $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. I dessa är $\delta = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$.

SVAR: $\pm(1, 1)$ ligger närmast origo, och $\pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ligger längst bort från origo.

5. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x, y) = xy - x - y - 2\cos(x - y)$ kring punkten $(x, y) = (1, 1)$, och använd sedan detta polynom för att avgöra om $f(x, y)$ har ett lokalt extremum i denna punkt. (4p)

   Lösning: $x = 1 + h$, $y = 1 + k$ med $(h, k) \approx (0, 0) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (1 + h)(1 + k) - (1 + h) - (1 + k) - 2\cos(h - k) \\ &= 1 + h + k + hk - 1 - h - 1 - k - 2\left(1 - \frac{(h-k)^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= -3 + hk + (h^2 - 2hk + k^2) + \cdots = -3 + h^2 - hk + k^2 + \cdots \\ &= -3 + (h - k/2)^2 + 3k^2/4 + \cdots \Longrightarrow \end{aligned}$$

   sökta Taylorpolynomet ges av

$$P_2(x, y) = -3 + (x - 1)^2 - (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2.$$

   Eftersom $(h - k/2)^2 + 3k^2/4 > 0$ då $(h, k) \neq (0, 0)$ har $f(x, y)$ ett lokalt minimum i punkten $(1, 1)$.

6. Skissera först området

$$D = \{(x,y)\colon\, x>0,\ y>0,\ 1/x \le y \le 2/x,\ x \le y \le x+2\},$$

och beräkna sedan dubbelintegralen

$$\mathcal{I} = \iint_D xy(y^2 - x^2)\,dxdy. \qquad (4p)$$

Lösning: D ligger mellan kurvorna $xy = 1$, $xy = 2$ och $y - x = 0$, $y - x = 2$ i första kvadranten. Med de nya variablerna

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = y - x \end{cases}$$

fås det enklare området $\Omega = \{(u,v)\colon\, 1 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\}$ i uv-planet. Vidare är

$$dudv = \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| dxdy, \quad \text{där} \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \det\begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = y + x,$$

så att $dudv = (x+y)\,dxdy$. Därmed blir

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \iint_D xy(y-x)\cdot(x+y)\,dxdy = \iint_\Omega uv \cdot dudv \\ &= \int_{u=1}^{2} u\,du \cdot \int_{v=0}^{2} v\,dv = [u^2/2]_1^2 \cdot [v^2/2]_0^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\cdot 2 = 3. \end{aligned}$$

7. Betrakta ekvationen $F(x,y) \overset{\text{def}}{=} x^2 + xy + y^2 - x + 2y + 2 = 0$.

   (a) Lös ekvationen $F(1,y) = 0$, och använd sedan resultatet för att avgöra huruvida kurvan $\{(x,y)\colon\, F(x,y) = 0\}$ är grafen av en funktion. (1p)

   (b) Visa att kurvan $\{(x,y)\colon\, F(x,y) = 0\}$ *nära* punkten $(1,-1)$ *är* grafen av en funktion $y = f(x)$. (1p)

   (c) Härled Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $f(x)$ kring punkten $x = 1$. (2p)

Lösning: (a) $0 = F(1, y) = 1+y+y^2-1+2y+2 = y^2+3y+2 \iff$

$$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1. \end{cases}$$

Så mot $x = 1$ svarar *två* y-värden, vilket medför att kurvan $F = 0$ *inte* är grafen av en funktion.

(b) $\partial F/\partial y = x + 2y + 2 \Longrightarrow \partial F/\partial y(1, -1) = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ kan lösa ut $y = f(x)$ ur $F(x, y) = 0$ *nära* punkten $(1, -1)$.

(c) $y = f(x)$ insatt i $F(x, y) = 0 \Longrightarrow F(x, f(x)) = 0$ för *alla* x:

$$x^2 + x \cdot f(x) + f^2(x) - x + 2f(x) + 2 = 0, \quad \textit{alla } x.$$

d/dx på denna identitet $\Longrightarrow$

$$2x + f(x) + x \cdot f'(x) + 2f(x) \cdot f'(x) - 1 + 2f'(x) = 0, \quad \textit{alla } x. \quad (*)$$

$x = 1,\ f(1) = -1 \Longrightarrow 2 - 1 + f'(1) + 2 \cdot (-1) \cdot f'(1) - 1 + 2f'(1) = 0 \iff f'(1) = 0$. d/dx på (*) $\Longrightarrow$

$$2 + f'(x) + f'(x) + x \cdot f''(x) + 2(f'(x))^2 + 2f(x) \cdot f''(x) + 2f''(x) = 0.$$

$x = 1,\ f(1) = -1$ och $f'(1) = 0 \Longrightarrow$

$$2 + f''(1) - 2f''(1) + 2f''(1) = 0 \iff f''(1) = -2.$$

Därmed blir Taylorutvecklingen omkring $x = 1$:

$$f(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \cdots = -1 - (x-1)^2 + \cdots .$$

8. Låt γ vara halvcirkelbågen $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ från punkten $(1, 0)$ till punkten $(-1, 0)$. Beräkna kurvintegralen

$$\mathcal{I} = \int_\gamma \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y e^{xy} + 3 \right) dx + (x + x e^{xy})\, dy. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: $P = x^2 y + y^3/3 + y e^{xy} + 3$ och $Q = x + x e^{xy} \Longrightarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + e^{xy} + xy e^{xy} - (x^2 + y^2 + e^{xy} + xy e^{xy}) = 1 - (x^2 + y^2).$$

Om α är linjestycket från $(-1,0)$ till $(1,0)$ och D är övre delen av enhetsskivan: $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$, så är $\alpha+\gamma = \partial D =$ D:s rand, och då säger Green att

$$\oint_{\alpha+\gamma} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dxdy \Longrightarrow$$

$$\mathcal{I} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (1-(x^2+y^2)\,dxdy - \int_\alpha P\,dx + Q\,dy.$$

Dubbelintegralen blir

$$\iint_D (1-(x^2+y^2)\,dxdy = \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{\pi} (1-r^2)\cdot r\,drd\phi$$
$$= \int_0^1 (r-r^3)\,dr \cdot \int_0^\pi d\phi = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}.$$

På α är $y=0$, som ger att $dy=0$, och x går från -1 till 1, så att

$$\int_\alpha P\,dx + Q\,dy = \int_{x=-1}^1 3\,dx = 6.$$

SVAR: $\mathcal{I} = \pi/4 - 6$.