KTH-Matematik
Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2009-05-26, kl. 08.00-13.00
SF1626, flervariabelanalys för CINTE1och CMIEL1 samt CSAMH1 (7,5hp)

Göran och Karim.

1. Lösning se tal 2.35 i övningsboken.

2. Stationära punkter till $f(x,y) = y^3 + x^2 - 2x - 3y$ fås ur ekvationssystemet $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$.

Vi får

$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$ vilket ger $x = 1$ och $y = \pm 1$, dvs två punkter (1,1) och (1,–1). Vi försöker bestämma punkternas karaktär med hjälp av t ex Hessianen (finns andra metoder)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$ Sätt in stationära punkter (1,1) och (1,–1) och finn motsvarande egenvärden

a) För $(1,1)$ får vi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ som ger två positiva egenvärden 2 och 6. Detta ger att (1,1) är en lokal minimipunkt.

b) För $(1,-1)$ får vi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ som ger två egenvärden med olika tecken 2 och -6. Detta ger att (1,-1) är en sadelpunkt.

3. $$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx\, dy = \left[\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \begin{cases} r = 0 \to \infty \\ \theta = 0 \to \pi/2 \end{cases} \; dxdy = rdrd\theta \right] = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2+1} r\, dr\, d\theta =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{r}{1+r^2} [\theta]_0^{\pi/2} dr = \frac{\pi}{2} \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(1 + R^2\right) = \infty$$

4. Termen $\arctan y^2$ ser besvärlig ut att integrera, vilket är tecken på att parametrisering av randkurvan bör undvikas och att Greens formel bör användas . Vi observerar att fältet är kontinuerligt deriverbart.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \arctan y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos x - y\right) = 2y + 0 - (0-1) = 2y + 1$$

Greens sats ger

$$\oint_\gamma \left(e^x \cos x - y\right)dx + \left(2xy + \arctan y^2\right)dy = \iint_{x^2 \le y \le x} (2y+1)\,dx\,dy =$$ {kurvorna skär varandra

då $x^2 = x \Rightarrow x = 0{,}1$ }=

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{x} (2y+1)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[y^2 + y\right]_{y=x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + x - x^4 - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(-x^4 + x\right)dx =$$

$$= \left[-x^5/5 + x^2/2\right]_0^1 = 3/10$$

5. Ytorna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$

Kurvans projektion i xy-planet fås genom att eliminera z ur systemet vilket ger $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 + y^2$ dvs en cirkel med ekvationen $x^2 + y^2 = 4$. Om D betecknar området inom cirkeln, får vi

$$V = \iint_D \left(8 - x^2 + y^2 - x^2 - 3y^2\right)dx\,dy = 2\iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right)dx\,dy =$$

{polära koordinater $dxdy = rdrd\theta, r: 0 \to 2, \theta = 0 :\to 2\pi$ }

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4 - r^2\right) r\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^2 (4r - r^3)\,dr = 4\pi\left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 16\pi .$$

6. Låt $\begin{cases} F = x^4 + y^4 + 4z - 9 \\ G = x + 3y + 2z - 7 \end{cases}$.

I punkten $(x,y,z) = (0,1,2)$ får vi

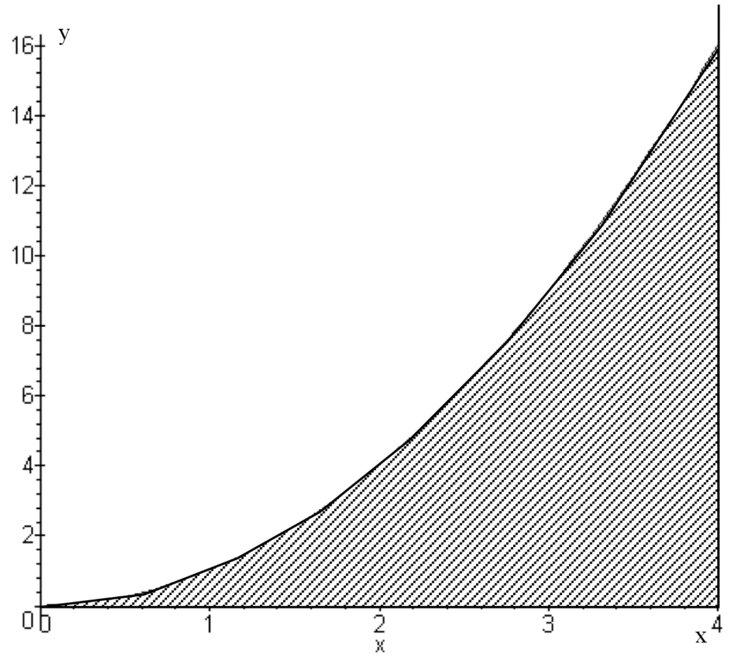
$\begin{cases} F(0,1,2) = 0 \\ G(0,1,2) = 0 \end{cases}$ och det $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x^3 & 4y^3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12x^3 - 4y^3$ och med

insätting $x = 1, y = 2$ fås att det$\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right) = -4 \neq 0$. Detta visar att det finns precis två funktioner $x = x(z)$ och $y = y(z)$ med den nämnda egenskapen. Dessa funktioner är deriverbara. Implicit derivering av det givna ekvationssystemet (med avseende på z) ger

$\begin{cases} 4x^3x' + 4y^3y' + 4 = 0 \\ x' + 3y' + 2 = 0 \end{cases}$ och för $(x,y,z) = (0,1,2)$ fås $\begin{cases} 4y' + 4 = 0 \\ x' + 3y' + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{\textbf{Svar: } x'(2) = 1.}$

7. Vi börjar med att rita upp området.



Eftersom området är kompakt, så finns det verkligen ett största och ett minsta värde till *f*.
Vi börjar med att undersöka om *f* har några extremvärden i det inre av triangeln. De kritiska punkterna ges av

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(2xy - 4y, x^2 - 4x + 4y\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2x-4)y = 0 \\ x^2 - 4x + 4y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1\end{cases} \text{ eller } \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \text{ eller x=0}\end{cases}$$

där endast (2,1) hör till området. Funktionen antar där värdet

$$f(2,1) = 4 - 8 + 2 = -2$$

Vi måste även kontrollera om *f* har några extremvärden på områdets rand, som utgörs av x-axeln mellan 0 och 4, linjen $x = 4$ och kurvan $y = x^2$. På x-axeln får vi

$f(x, y = 0) = 0$

Tydligen är funktionens konstant lika med noll utmed hela x-axeln.
På linjen $x = 4$ får vi

$$f(x = 4, y) = 16y - 16y + 2y^2 = 2y^2$$

som är växande .
På kurvan $y = x^2$ får vi

$$f(x, y = x^2) = x^4 - 4x^3 + 2x^4 = 3x^4 - 4x^3 = g(x)\,.$$

Vi deriverar för att bestämma extremvärden till g.

$$g'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

och

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 1.$$

Funktionen antar då värdena

$$g(0) = f(0,0) = 0$$

och

$$g(1) = f(1,1) = 1 - 4 + 2 = -1$$

Slutligen måste vi även studera hörnpunkterna. Vi får

$$f(0,0) = f(4,0) = 0,$$

och

$$f(4,16) = 16^2 - 16^2 + 2 \cdot 16^2 = 512$$

Således är det största värdet som funktionen antar på det givna området 512 och det minsta -2.

8. Låt x,y och z vara parallellepipedens kanter. Dess volym är xyz och dess diagonal är $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sök maximum av xyz då $x^2+y^2+z^2=9$. $F = xyz + t(x^2+y^2+z^2-9)$.

$$\begin{cases} F'_x = yz + 2tx = 0 \\ F'_y = xz + 2ty = 0 \\ F'_z = xy + 2tz = 0 \\ F'_t = x^2+y^2+z^2-9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Ur $y \cdot F'_x - x \cdot F'_y = y^2z - x^2z = 0$ fås $x = y$ (x, y och z är positiva) och $z \cdot F'_y - y \cdot F'_z = xz^2 - xy^2 = 0$ ger $y = z$. $F'_t = 0$ ger då $x = y = z = \sqrt{3}$ och vi får att maximum av xyz är $= 3\sqrt{3} < 6$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Nej.}}$