KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1626 Flervariabelanalys för CELTE1, CMAST1
09–06–08, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta din lärare så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Låt
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} \quad \text{då } (x, y) \neq (0, 0).$$
Är det möjligt att definiera $f(x, y)$ i origo så att funktionen blir kontinuerlig där? Förklara! (3p)

Lösning: $x \neq 0 \Longrightarrow f(x, 0) = 0 \to 0$ då $x \to 0$, och
$$x \neq 0 \Longrightarrow f(x, x) = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3} \neq 0 \text{ då } x \to 0.$$
Eftersom man alltså får *olika* gränsvärden i olika riktningar så kan $f(x, y)$ *inte* definieras så att den blir kontinuerlig i $(0, 0)$.

2. Visa först att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ nära punkten $(1,1,1)$ kan skrivas på formen $z = z(x,y)$, där $z(1,1) = 1$. Beräkna sedan riktningsderivatan av $z(x,y)$ i punkten $(1,1)$ och i den riktning som ges av $\boldsymbol{v} = (4,3)$. (3p)

   Lösning: $\partial/\partial z(x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y) = 3z^2 + x$, som är $= 4 \neq 0$ i $(1,1,1) \implies$ kan lösa ut $z = z(x,y)$ ur ekvationen nära $(1,1,1)$. Differentiering visar att

$$(3x^2 + z)\,dx + (3y^2 + 5)\,dy + (3z^2 + x)\,dz = 0.$$

   I punkten $(1,1,1)$ fås $4\,dx + 8\,dy + 4\,dz = 0$ eller $dz = -dx - 2\,dy$, så att

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -2.$$

   Den sökta riktningsderivatan ges till slut av

$$\operatorname{grad} z(1,1) \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = (-1,-2) \cdot \frac{(4,3)}{\sqrt{16+9}} = \frac{-4-6}{5} = -2.$$

3. Beräkna volymen av den ändliga del av första oktanten $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ som begränsas av sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ samt av konen $z^2 = x^2 + y^2$. (3p)

   Lösning: Här är det lämpligt att införa sfäriska (eller rymdpolära) koordinater:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \text{med} \quad dxdydz = r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi.$$

   Uttryckt i dessa ges integrationsområdet av $1 \leq r \leq 4$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ och $0 \leq \phi \leq \pi/2$, så att volymen ges av

$$\begin{aligned} V &= \int_{r=1}^{4} \int_{\theta=0}^{\pi/4} \int_{\phi=0}^{\pi/2} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi = \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^4 r^2\, dr \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^4 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4^3 - 1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{63}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{21\pi}{4}(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ i cirkelskivan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 9\}$. (3p)

Lösning:

Inre stationära punkter i öppna cirkelskivan:

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 6x^2 - y^2, \\ 0 = \partial f/\partial y = -2xy; \end{cases}$$

$xy = 0 \iff x = 0$ eller $y = 0$; insatt i $6x^2 - y^2 = 0$ fås $x = y = 0$ med $f(0,0) = 0$.

Randpunkter: På randen är $y^2 = 9 - x^2$, där $-3 \le x \le 3$, så där är $f = 2x^3 - x(9 - x^2) = 3x^3 - 9x = g(x)$, säg. $0 = g'(x) = 9(x^2 - 1) \iff x = \pm 1$, så g:s största och minsta värden antas bland punkterna ± 1 och ± 3. $g(-3) = -54$, $g(-1) = 6$, $g(1) = -6$, $g(3) = 54 \implies f$:s största värde är $= 54$, och det minsta är $= -54$.

5. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

med hjälp av variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$. (4p)

Lösning: $u = x + y$ och $v = x - y \implies u_x = u_y = v_x = 1$ medan $v_y = -1$. Med hjälp av kedjeregeln fås förstaderivatorna

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = z_u + z_v, \quad z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = z_u - z_v,$$

och därefter andraderivatorna

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_x)_x = (z_u + z_v)_x = z_{uu} \cdot u_x + z_{uv} \cdot v_x + z_{vu} \cdot u_x + z_{vv} \cdot v_x \\ &= z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}, \\ z_{xy} &= (z_u + z_v)_y = z_{uu} \cdot u_y + z_{uv} \cdot v_y + z_{vu} \cdot u_y + z_{vv} \cdot v_y \\ &= z_{uu} - z_{vv}, \\ z_{yy} &= (z_u - z_v)_y = z_{uu} \cdot u_y + z_{uv} \cdot v_y - z_{vu} \cdot u_y - z_{vv} \cdot v_y \\ &= z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv}. \end{aligned}$$

Så $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0 \iff z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv} + 2z_{uu} - 2z_{vv} + z_{uu} - 2z_{uv} + z_{vv} = 4z_{uu} = 0 \iff z_{uu} = 0$. Den sista ekvationen löses på följande sätt:

$z_{uu} = 0 \iff (z_u)_u = 0 \iff z_u = g(v)$, där $g(v)$ är en godtycklig funktion av v ; $z_u = g(v) \iff (z - u \cdot g(v))_u = 0 \iff z - u \cdot g(v) = h(v)$, där $h(v)$ är en godtycklig funktion av v, så att $z = u \cdot g(v) + h(v) = (x+y) \cdot g(x-y) + h(x-y)$.

6. Ekvationerna

$$\begin{cases} x = v^3 - uv, \\ y = 3uv + 2u^2, \end{cases}$$

definierar en avbildning $\boldsymbol{f}$ från uv-planet till xy-planet med $\boldsymbol{f}(2,-1) = (1,2)$. Visa att $\boldsymbol{f}$ har en lokal invers

$$\boldsymbol{f}^{-1}\colon \begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$$

definierad nära $(1,2)$ i xy-planet, samt beräkna

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,2). \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Differentiering av ekvationerna ger

$$\begin{cases} dx = -v\,du + (3v^2 - u)\,dv, \\ dy = (3v + 4u)\,du + 3u\,dv. \end{cases}$$

Då $u = 2$ och $v = -1$ fås

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \iff \begin{cases} du = 6\,dx - dy, \\ dv = -5\,dx + dy \end{cases},$$

Att man kan lösa ut du och dv då $(u,v) = (2,-1)$ visar att de sökta funktionerna $u(x,y)$ och $v(x,y)$ kan definieras nära punkten $(x,y) = \boldsymbol{f}(2,-1) = (1,2)$. Ur sambandet $du = 6\,dx - dy$ ser man att

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 6 \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -1.$$

7. Låt a vara en positiv konstant. Beräkna arean av den ändliga kropp som begränsas av sfären $x^2+y^2+z^2=3a^2$ och paraboloiden $x^2+y^2=2az$.

   Ledning: Areaelementet ges t. ex. av $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. (4p)

   Lösning: På skärningen mellan ytorna är

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2, \\ x^2+y^2=2az^2. \end{cases}$$

   Skillnaden mellan ekvationerna blir

$$\begin{aligned} &z^2=3a^2-2az \iff z^2+2az-3a^2=0 \iff \\ &z=-a\pm\sqrt{a^2+3a^2}=-a\pm 2a=a \text{ eller } -3a; \end{aligned}$$

   då $z=(x^2+y^2)/(2a)\geq 0$ är det $z=a$ som gäller. Så skärningen utgörs av cirkeln

$$\begin{cases} z=a, \\ x^2+y^2=2a^2, \end{cases}$$

   och kroppens projektion på xy-planet ges av $x^2+y^2\leq 2a^2$.

   Undre paraboliska ytan:

$$\begin{aligned} &z=(x^2+y^2)/(2a) \implies z_x=x/a \text{ och } z_y=y/a \implies \\ &1+z_x^2+z_y^2=1+\frac{x^2+y^2}{a^2}=1+\frac{r^2}{a^2} \implies dS=\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}\,r\,drd\theta \implies \\ &S_{\text{undre}}=\int_{r=0}^{a\sqrt{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}\,r\,drd\theta \\ &\quad=2\pi\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2}\cdot\frac{a^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{2}}=\frac{2\pi a^2}{3}(3\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

Övre sfäriska ytan:

$$z = (3a^2 - x^2 - y^2)^{1/2} \Longrightarrow z_x = \frac{-x}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{och}$$

$$z_y = \frac{-y}{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} \Longrightarrow$$

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{3a^2 - x^2 - y^2} = \frac{3a^2}{3a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{3a^2}{3a^2 - r^2} \Longrightarrow dS = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - r^2}} r\, dr d\theta \Longrightarrow$$

$$S_{\text{övre}} = a\sqrt{3} \int_{r=0}^{a\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r\, dr d\theta}{\sqrt{3a^2 - r^2}} = 2\pi a\sqrt{3} \int_0^{a\sqrt{2}} (3a^2 - r^2)^{-1/2} \cdot r\, dr$$

$$= 2\pi a\sqrt{3} \big[-(3a^2 - r^2)^{1/2}\big]_0^{a\sqrt{2}} = 2\pi a\sqrt{3} \left(-(a^2)^{1/2} + (3a^2)^{1/2}\right)$$

$$= 2\pi a^2 (3 - \sqrt{3}).$$

Så hela arean är lika med

$$\frac{2\pi a^2}{3}(3\sqrt{3} - 1 + 9 - 3\sqrt{3}) = \frac{16\pi a^2}{3}.$$

8. Låt γ vara kurvan från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ i övre halvplanet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$ längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$. Beräkna kurvintegralen

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (2x - y + 1)\, dx + (x + 3y + 2)\, dy. \qquad \text{(4p)}$$

Lösning: Om γ kompletteras med räta linjestycket α längs x-axeln från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ så blir $\gamma + \alpha = -\partial D$, där D är övre halvan av ellipsen. Enligt Green är då

$$\oint_{\gamma+\alpha} P\, dx + Q\, dy = -\iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\, dxdy.$$

Här är $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1 - (-1) = 2$, och längs α är $y = 0$, $dy = 0$ med x löpande från 1 till -1. Alltså blir

$$\mathcal{I} = -\iint_D 2\, dxdy - \int_1^{-1} (2x + 1)\, dx = -\text{ hela ellipsens area } + \int_{-1}^1 dx$$

$$= -\pi \cdot 1 \cdot 2 + 2 = 2 - 2\pi.$$

Alternativt med parametrisering: $u = 2x$, $v = y \Longrightarrow u^2 + v^2 = 4x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow$ parametriseringen $u = 2\cos\theta$, $v = 2\sin\theta$, där θ går från π till 0. Så på γ är

$$\begin{cases} x = \cos\theta \Longrightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta, \\ y = 2\sin\theta \Longrightarrow dy = 2\cos\theta\, d\theta, \end{cases}$$

där $\theta\colon \pi \to 0$. Därmed fås

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\theta=\pi}^{0} \{(2\cos\theta - 2\sin\theta + 1)(-\sin\theta) + (\cos\theta + 6\sin\theta + 2)\cdot 2\cos\theta\}\, d\theta \\ &= \int_{\pi}^{0} (-2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta - \sin\theta + 2\cos^2\theta + 12\sin\theta\cos\theta + 4\cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_{\pi}^{0} (10\sin\theta\cos\theta + 4\cos\theta - \sin\theta + 2)\, d\theta \\ &= \left[5\sin^2\theta + 4\sin\theta + \cos\theta + 2\theta\right]_{\pi}^{0} = 1 - (-1) - 2\pi = 2 - 2\pi. \end{aligned}$$