KTH Matematik
Olle Stormark

Tentamen i SF1626 Flervariabelanalys för CELTE1, CMAST1
09–06–08, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3, 4$) får automatiskt full poäng på tal i.
- Betygsgränser: 26–28 poäng ger betyget A, 23–25 poäng ger betyget B, 20–22 poäng ger betyget C, 17–19 poäng ger betyget D och 14–16 poäng ger betyget E.
- Om du har fått 13 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta din lärare så fall. Mindre än 13 poäng ger betyget F = underkänt.
- För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K respektive U med krav som för A, B/C, D/E, Fx respektive F.
- **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**

1. Låt
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} \quad \text{då } (x, y) \neq (0, 0).$$
Är det möjligt att definiera $f(x, y)$ i origo så att funktionen blir kontinuerlig där? Förklara! (3p)

2. Visa först att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ nära punkten $(1, 1, 1)$ kan skrivas på formen $z = z(x, y)$, där $z(1, 1) = 1$. Beräkna sedan riktningsderivatan av $z(x, y)$ i punkten $(1, 1)$ och i den riktning som ges av $\boldsymbol{v} = (4, 3)$. (3p)

3. Beräkna volymen av den ändliga del av första oktanten $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ som begränsas av sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ samt av konen $z^2 = x^2 + y^2$. (3p)

4. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 2x^3 - xy^2$ i cirkelskivan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. (3p)

5. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

med hjälp av variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$. (4p)

6. Ekvationerna

$$\begin{cases} x = v^3 - uv, \\ y = 3uv + 2u^2, \end{cases}$$

definierar en avbildning $\boldsymbol{f}$ från uv-planet till xy-planet med $\boldsymbol{f}(2, -1) = (1, 2)$. Visa att $\boldsymbol{f}$ har en lokal invers

$$\boldsymbol{f}^{-1} : \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

definierad nära $(1, 2)$ i xy-planet, samt beräkna

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 2) \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1, 2).$$ (4p)

7. Låt a vara en positiv konstant. Beräkna arean av den ändliga kropp som begränsas av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ och paraboloiden $x^2 + y^2 = 2az$.

   Ledning: Areaelementet ges t. ex. av $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$. (4p)

8. Låt γ vara kurvan från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ i övre halvplanet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$. Beräkna kurvintegralen

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (2x - y + 1)\, dx + (x + 3y + 2)\, dy.$$ (4p)