KTH-Matematik

Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2009-08-20, kl. 14.00-19.00
SF1626, flervariabelanalys för CINTE1och CMIEL1 samt CSAMH1 (7,5hp)
Göran och Karim.

1. Vi skall beräkna derivatan av f i riktningen $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$, där $\mathbf{u}=\overline{P_0P_1}=(2,\pi/4,-1)$. vi får

$$\mathbf{e}=\frac{(2,\pi/4,-1)}{\sqrt{5+\frac{\pi^2}{16}}}$$

och

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0)=\nabla f(P_0)\bullet\mathbf{e}=\left(y\cos xy, x\cos xy+\frac{z}{\cos^2 yz},\frac{y}{\cos^2 yz}\right)(P_0)\bullet\mathbf{e}=(\pi/4,2,\pi/2)\bullet\left(\frac{(2,\pi/4,-1)}{\sqrt{5+\frac{\pi^2}{16}}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{80+\pi^2}}$$

Finns det någon riktning $\mathbf{v}$ så att $f'_{\mathbf{e}}(P_0)=1$?
Vi söker om möjligt enhetsvektorn $\mathbf{v}$ så att $\nabla f(P_0)\bullet\mathbf{v}=1$
$f'_{\mathbf{v}}(P_0)$ är störst då $\mathbf{v}=\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$. Vi får

$$f'_{\mathbf{v}}(P_0)=\nabla f(P_0)\bullet\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}=|\nabla f(P_0)|=|(\pi/4,2,\pi/2)|=\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+4+\frac{\pi^2}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{5\pi^2+64}>1$$

Detta visar att det finns någon riktning $\mathbf{v}$ där $f'_{\mathbf{e}}(P_0)=1$.

2. Stationära punkter ges av systemet $\begin{cases} f'_x = 6x-6y=0 \\ f'_y=-6x+6y^2=0\end{cases}$.

Vi får två punkter (0,0) och (1,1). Vi har olika alternativ att undersöka deras karaktär. Vi väljer här via Hessianmatrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y\end{pmatrix}$$

Insättning av stationära punkter ger

I (0,0) fås $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0\end{pmatrix}$ vilket ger egenvärden $3\pm\sqrt{45}$ som har olika tecken .

Detta ger att vi har en sadel punkt.

I (1,1) fås $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ vilket ger egenvärden $9 \pm \sqrt{45}$ som är positiva.

Detta ger att vi har ett lokalt minimum

Svar: Enda lokala extrempunkten är ett lokalt minimum i (1,1).

3. $x^2 + 2x + y^2 \le 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 \le \left(\sqrt{2}\right)^2$. Vi inför nu polära koordinater

$$\begin{cases} x = -1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r: 0 \to \sqrt{2}\ , \theta: 0 \to 2\pi$$

Volymen av kroppen blir då

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy \to \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} (-1 + r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta \right) rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (\int_0^{2\pi} r\left(1 + r^2 - 2r\cos\theta\right) d\theta) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\left(1 + r^2\right) dr = 4\pi$$

Svar: Den sökta volymen=4π

4a. f är kontinuerlig och mängden är kompakt implicerar att f antar största och minsta värdet på mängden.

4b. Största och minsta värdet antas antingen i en inre stationär punkt eller i en randpunkt eller i en singulär punkt. Inre stationära punkter fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Här är $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6 \neq 0$ dvs det finns inga inre stationära punkter.

Punkter på randen $g(x,y) = 3x^2 + y^2 - 16 = 0$ kan fås med hjälp av Lagranges metod dvs genom att lösa ekvationssystemet grad $f = t$ grad g under bivillkoret $g(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} f_x' = t\, g_x' \\ f_y' = t\, g_y' \\ g = 0 \end{cases} \text{ dvs } \begin{cases} 6 = 6tx \\ 2 = 2ty \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Ur den första och den andra ekvationen fås $x = y$ vilket, insatt i den tredje ekvationen, ger $x = \pm 2$, dvs man får punkterna (2,2) och (–2,–2). Några singulära punkter finns inte (varför?)

Sammanfattningsvis får vi två intressanta punkter (2,2) och (–2,–2). I dessa punkter antar f värdena –16 och 16.

Svar :Största värdet=16, minsta värdet=-16

5a. f har kontinuerliga partiella derivator av första ordningen implicerar att f är differentierbar.

5b. Jacobimatrisen till $\boldsymbol{g}$ är $J_{\boldsymbol{g}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x+y) & 3-\sin(x+y) \\ 3-\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{bmatrix}$ och

$\det J_{\boldsymbol{g}} = 6\sin(x+y) - 9 \neq 0$ implicerar att $\boldsymbol{g}$ är lokalt inverterbar i hela planet.

5c. I $(x,y) = (0,0)$ är $J_{\boldsymbol{g}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ implicerar att i $(u,v) = (1,1)$ är $J_{\boldsymbol{g}^{-1}} = (J_{\boldsymbol{g}})^{-1}$.

Vi får svaret dvs $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

---

6. Se ex 7 i kursboken sid 338.

---

7. Se övning 7.14 i övningsboken sid 124.

---

8. Låt x, y och z vara lådans sidlängder och m mängden av plåt. Lådans volym är $= xyz$ och vi söker det största värdet av xyz under bivillkoret att den sammanlagda arean av lådans sidor är $m = xy + 2xz + 2yz$. Sätt $u = xy$, $v = xz$ och $w = yz$. Då gäller det att (lådans volym)^2 är $= uvw = f(u,v,w)$ och bivillkoret ges av $m = u + 2v + 2w = g(u,v,w)$. Bivillkoret beskriver en kompakt mängd (om $u,v,w \geq 0$) och f är en kontinuerlig funktion. Detta garanterar att f antar ett största och ett minsta värde. (Det minsta värdet antas förstås då någon av x, y, z är $= 0$). Enligt Lagrange kommer det största värdet att antas i en punkt som satisfierar något av de nedanstående ekvationssystemen:

$$\begin{cases} 0 = f'_u + t \cdot g'_u = vw + t & (1) \\ 0 = f'_v + t \cdot g'_v = uw + 2t & (2) \\ 0 = f'_w + t \cdot g'_w = uv + 2t & (3) \\ m = g = u + 2v + 2w & (4) \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} 0 = g'_u = 1 & (5) \\ 0 = g'_v = 2 & (6) \\ 0 = g'_w = 2 & (7) \\ m = g = u + 2v + 2w & (8). \end{cases}$$

Det andra ekvationssystemet saknar lösning. För positiva u, v och w får vi:

$2\cdot(1) - (2)$ ger $w(2v - u) = 0$, dvs. $u = 2v$, $(2) - (3)$ ger $u(w - v) = 0$, dvs. $w = v$.

Detta insatt i (4) ger $m = 6v$, alltså

$$(u,v,w) = \frac{m}{6}(2,1,1) \quad \Rightarrow x = y = \sqrt{m/3},\ z = \frac{1}{2}\sqrt{m/3}\ .$$

$$\text{Volymen} = xyz = \sqrt{\frac{m}{3}}\sqrt{\frac{m}{3}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{3}} = \frac{m}{6}\frac{\sqrt{3m}}{3} = \frac{m\sqrt{3m}}{18}\ .$$

Svar den sökta volymen är $\dfrac{m\sqrt{3m}}{18}$
