Institutionen för Matematik, KTH

Flervariabelanalys SF1626. Tentamen den 23 november 2009. Lösningsförslag

1. Funktioner $f(x, y)$ och $g(x, y)$ definieras i den första kvadranten $Q = \{(x, y) : x, y > 0\}$ med formler

$$f(x, y) = xy^2; \quad g(x, y) = \frac{y}{x}.$$

I vilka punkter i Q är nivåkurvor till f och g vinkelräta mot varandra?

Lösning. Nivåkurvor är vinkelräta om och endast om deras normaler är vinkelräta. En normal till nivåkurvor av någon funktion ges av gradienten av funktionen. Vi har

$$\nabla f = (y^2, 2xy) \quad \text{och} \quad \nabla g = (-y/x^2, 1/x).$$

Villkor $\nabla f \cdot \nabla g = 0$ ger oss

$$-y^3/x^2 + 2y = 0$$

varav $2x^2 = y^2$ eller $y = \sqrt{2}x$. Alltså, nivåkurvor är vinkelräta i punkter på linjen $y = \sqrt{2}x$.

2. Kroppen K begränsas av ytor $z = 4 - x^2 - y^2$ och $z = x^2 + y^2 - 4$. Bestäm medelvärdet av funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ definierad i kroppen K.

Lösning. Medelvärdet ges som

$$M = \frac{1}{V(K)} \iiint_K (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

där $V(K)$ är volymen av kroppen K. Volymen i sin tur ges som

$$V(K) = \iiint_K 1\, dx\, dy\, dz.$$

För att beräkna både integraler använder vi oss av cylindriska koordinater. Vi observerar att kroppen är en rotationskropp kring z-axeln och villkor att $x^2 + y^2 - 4 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ ger oss $r^2 - 4 \leq z \leq 4 - r^2$ och $0 \leq r \leq 2$.

Volymen ges då av integralen

$$V(K) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 dr \int_{r^2-4}^{4-r^2} dz \cdot r = 2\pi \int_0^2 r(8 - 2r^2)\, dr = 16\pi.$$

Vi har också

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 dr \int_{r^2-4}^{4-r^2} dz \cdot r \cdot r^2 = 2\pi \int_0^2 r^3(8 - 2r^2)\, dr = 64\pi/3.$$

Medelvärdet blir $M = 4/3$.

3. En rymdkurva γ ges av parametriska ekvationer

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = t^2; \\ z = \ln t \end{cases}$$

där $1 \leq t \leq 2$. Bestäm kurvintegralen

$$\int_\gamma x\, ds.$$

(Håll ögonen öppna för jämna kvadrat!)

Lösning. Vi har

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \sqrt{4 + 4t^2 + 1/t^2}\, dt = \sqrt{(2t + 1/t)^2}\, dt = (2t + 1/t)\, dt.$$

Integralen blir

$$\int_\gamma x\, ds = \int_1^2 2t(2t + 1/t)\, dt = \int_1^2 (4t^2 + 2)\, dt = \frac{34}{3}.$$

4. En yta i rymden ges av ekvation $3xyz = x^3y + y^3z + z^3x$. Visa att den del av ytan som ligger i en liten omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ ges som graf av en funktion $x = x(y, z)$. Bestäm partiella derivator x'_y och x'_z för denna funktion i punkten $(y, z) = (1, 1)$. I vilken riktning växer funktionen $x(y, z)$ snabbast i den punkten?

Lösning. Enligt implicitfunktionssats ekvationen

$$F(x, y, z) = 3xyz - x^3y - y^3z - z^3x = 0$$

ger variabel x som en funktion av y och z lokalt nära punkten $(1, 1, 1)$ om $F'_x(1, 1, 1) \neq 0$. Vi har

$$F'_x(x, y, z) = 3yz - 3x^2y - z^3$$

och $F'_x(1, 1, 1) = -1 \neq 0$. Detta visar att den implicita funktionen $x = x(y, z)$ finns. För att bestämma dess derivator, skriver vi en gång till ekvationen

$$F(x(y, z), y, z) = 0.$$

Derivering m av på y ger

$$F'_x \cdot x'_y + F'_y = 0,$$

varav

$$x'_y = -\frac{F'_y}{F'_x}.$$

Vi har $F'_y = 3xz - x^3 - 3y^2z$ och i punkten $(1, 1, 1)$ får vi $F'_y = -1$ vilket ger oss $x'_y = -1$.

Analogt,

$$x'_z = -\frac{F'_z}{F'_x}$$

och vi får $x'_z = -1$.

Riktningen där funktionen $x(y,z)$ växer snabbast är riktningen av dess gradient d v s vektor $(x'_y, x'_z) = (-1,-1)$.

5. Ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$ ges av formeln

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

Vad innebär att vektorfältet är konservativt? Vad är potentialen då? Antar att funktionerna F_1, F_2, F_3 har kontinuerliga partiella derivator. Vad är då ett nödvändigt villkor för att $\mathbf{F}$ var konservativt? Ge något exempel av ett konservativt vektorfält samt icke-konservativt vektorfält (motivera dina exempel ordentligt!)

Lösning. Det är en teoretisk uppgift. Se t ex Adams bok, avsnitt 15.2.

6. Räkna ut integralen

$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz,$$

där kroppen K är den del av klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ som ligger ovan koniska ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Lösning. Vi använder oss av sfäriska koordinater. Den koniska ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ges då av ekvation

$$r\cos\psi = r\sin\psi$$

varav $\psi = \pi/4$. Hela kroppen ges av olikheter $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \psi \le \pi/4$ i sfäriska koordinater. Jakobianen av transformation är $J = r^2 \sin\psi$. Integralen blir

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} d\psi \int_0^1 dr\, r\cos\psi \cdot r^2 \sin\psi = 2\pi \left(\int_0^{\pi/4} cos\psi \cdot \sin\psi\, d\psi \right) \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) = \pi/8.$$

7. Ett akvarium har en form av en rätvinklig parallelepiped utan locket med längden l, bredden b och höjden h. Det skall rymma $54\,dm^3$ vatten. Botten av akvariumet tillverkas av metallplåt som har ytdensitet $400\,g/dm^2$. Sidoytor tillverkas av glas med ytdensitet $100\,g/dm^2$. Bestäm optimala dimensioner l, b och h så att egen massa av akvariumet är minsta möjliga .

Lösning. Att akvarium rymmer $54\,dm^3$ innebär att $lbh = 54$, det är bivillkor i vårt optimerinsproblem: minimera funktionen

$$F(l,b,h) = 400lb + 200lh + 200bh$$

definierad på ytan $lbh = 54$ där $l, b, h > 0$. Vi observerar först att under villkor $lbh = 54$ det gäller att

$$F(l,b,h) = \frac{54}{lbh}(400lb + 200lh + 200bh) = 54\left(\frac{400}{h} + \frac{200}{b} + \frac{200}{l}\right).$$

Detta visar att om någon av variabler är jättestor då någon annan variabel skall vara jätte liten (för att uppfylla $lbh = 54$) och då funktionen $F(l, b, h)$ tar stora värdena. Alltså, minimumvärdet av funktionen F antas i någon kritisk punkt, eftersom nära oändligheten F växer mot ∞.

För att söka kritiska punkter använder vi oss av Lagranges metod. Lagrangesfunktionen är

$$L(x, y, z) = 400lb + 200lh + 200bh - \lambda(lbh - 54)$$

och Lagranges ekvationer är

$$\begin{cases} 400b + 200h = \lambda bh; \\ 400l + 200h = \lambda lh; \\ 200l + 200b = \lambda lb; \\ lbh = 54. \end{cases}$$

Den första ekvation minus den andra ger oss

$$400(b - l) = \lambda h(b - l)$$

varav två fall är mögliga: $400 = \lambda h$ (fall 1) eller $b = l$ (fall 2). I fall 1 sätter vi in $\lambda h = 400$ till högerled av den första ekvation av systemet och vi får $h = 0$ vilket är omöjligt.

I fall två får vi ekvationer

$$\begin{cases} 400l + 200h = \lambda lh \\ 400l = \lambda l^2. \end{cases}$$

Nu dividerar vi den första ekvation med den andra och vi får $h = 2l$.

Till slut, insättning av $b = l$ och $h = 2l$ till villkor $lbh = 54$ ger oss $2l^3 = 54$ varav $l = 3$. Den enda kritiska punkten är $l = 3$, $b = 3$, $h = 6$.

Svar: $l = b = 3dm$; $h = 6dm$.

8. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x, y, 1)$$

uppåt genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $z \geq 0$.

Lösning. Vi parametriserar ytan som graf av funktion d v s x och y tas som parametrar och radiusvektor av punkter på ytan ges som

$$\mathbf{r} = (x, y, z(x, y)) = (x, y, 1 - x^2 - y^2).$$

Området D där ligger x och y ges av villkor $z \geq 0$ vilket ger oss enhetsskivan i x, y-planet. Flödet blir då

$$\Phi = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y)\, dxdy.$$

Vi räknar $\mathbf{r}'_x = (1, 0, z'_x) = (1, 0, -2x)$ och $\mathbf{r}'_y = (0, 1, -2y)$. Kryssprodukten blir $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (2x, 2y, 1)$. Flödet är

$$\Phi = \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1)\, dxdy.$$

Efter övergång till polära koordinater får vi

$$\Phi = 2\pi \int_0^1 (2r^2 + 1) r\, dr = 2\pi.$$

9. En partikel som påverkas av kraften

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 \sin(\pi/2 + y^3)\,;\; x + y^2 x^3 \cos(\pi/2 + y^3))$$

rör sig moturs längs halvcirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ från punkten $(2, 0)$ till punkten $(-2, 0)$. Beräkna det arbetet som kraften urättar.

Lösning. Arbetet ges av kurvintegralen

$$A = \int_{\gamma_{cirk}} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy),$$

där γ_{cirk} är halvcirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ i positiv led och funktioner P och Q är komponenter av vårt vektorfält d v s $P(x, y) = x^2 \sin(\pi/2 + y^3)$ och $Q(x, y) = x + y^2 x^3 \cos(\pi/2 + y^3)$. Vi kompletterar γ_{cirk} med intervallet $\gamma_{lin} = [-2, 2]$ längs x-axel så att vi får en sluten kurva γ (genomlupen i positiv riktning). Vi har då

$$A = \int_\gamma (Pdx + Qdy) - \int_{\gamma_{lin}} (Pdx + Qdy).$$

Integralen längs slutna kurvan γ räknas m h av Greens formeln:

$$\int_\gamma (P\, dx + Q\, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 1\, dxdy = \text{Area}(D).$$

Här D är halvcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$. Dess arean är 2π.

Nu räknar vi integralen längs intervallet $[-2, 2]$. Vi har $y = 0$ och $dy = 0$ och integralen blir

$$\int_{-2}^2 P(x, 0)\, dx = \int_{-2}^2 x^2\, dx = 16/3.$$

Svar: $2\pi - 16/3$.

10. Området D i första kvadranten begränsas av linjerna $y = x$; $y = 2x$ samt $2y = x + 1$; $2y = x + 2$. Bestäm integralen

$$\iint_D x\, dx\, dy.$$

(Ledning: inför nya variabler $u = y/x$ och $v = 2y - x$).

Lösning.

Området i nya koordinater u och v ges av olikheter $1 \leq u \leq 2$ och $1 \leq v \leq 2$ d v s det är en rektangel. Nu uttrycker vi x och y genom u och v. Insättning av $y = ux$ till formeln $2y - x = v$

ger oss $2ux - x = v$ varav

$$x = \frac{v}{2u-1} \quad \text{och} \quad y = \frac{uv}{2u-1}.$$

Jakobimatrisen är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} -\frac{2v}{(2u-1)^2} & \frac{1}{2u-1} \\ -fracv(2u-1)^2 & \frac{u}{2u-1} \end{pmatrix}$$

och Jakobianen är

$$J = \frac{v}{(2u-1)^2}.$$

Integralen blir

$$I = \int_1^2 du \int_1^2 dv \cdot \frac{v}{2u-1} \cdot \frac{v}{(2u-1)^2} = \left(\int_1^2 v^2\, dv\right) \left(\int_1^2 \frac{du}{(2u-1)^3}\right) = \frac{14}{27}.$$

Svar: 14/27.