Institutionen för Matematik, KTH

Flervariabelanalys SF1626. Tentamen den 23 november 2009 kl. 8-13

Tillåtet hjälpmedel är Beta Mathematics Handbook. Tydliga lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar krävs för att undvika poängavdrag.

Uppgifterna poängsätts med fyra poäng vardera.

Uppgifterna 1-3 svarar mot kontinuerliga examinationen i kursen: godkänd lösning på KS-uppgift n ger automatiskt 4 poäng på tal n här, för n = 1, 2; godkänd hemuppgift ger 4 poäng på uppgift 3. För högre betyg krävs att man samlar poäng på uppgifter 7-10, så kallade VG- poäng.

Betygsgränser. A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX 14 poäng.

Lycka till!

1. Funktioner $f(x, y)$ och $g(x, y)$ definieras i den första kvadranten $Q = \{(x, y) \,:\, x, y > 0\}$ med formler

$$f(x, y) = xy^2; \quad g(x, y) = \frac{y}{x}.$$

I vilka punkter i Q är nivåkurvor till f och g vinkelräta mot varandra?

2. Kroppen K begränsas av ytor $z = 4 - x^2 - y^2$ och $z = x^2 + y^2 - 4$. Bestäm medelvärdet av funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ definierad i kroppen K.

3. En rymdkurva γ ges av parametriska ekvationer

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = t^2; \\ z = \ln t \end{cases}$$

där $1 \le t \le 2$. Bestäm kurvintegralen

$$\int_\gamma x\, ds.$$

(Håll ögonen öppna för jämna kvadrat!)

4. En yta i rymden ges av ekvation $3xyz = x^3y + y^3z + z^3x$. Visa att den del av ytan som ligger i en liten omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ ges som graf av en funktion $x = x(y, z)$. Bestäm partiella derivator x'_y och x'_z för denna funktion i punkten $(y, z) = (1, 1)$. I vilken riktning växer funktionen $x(y, z)$ snabbast i den punkten?

5. Ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$ ges av formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Vad innebär att vektorfältet är konservativt? Vad är potentialen då? Antar att funktionerna F_1, F_2, F_3 har kontinuerliga partiella derivator. Vad är då ett nödvändigt villkor för att $\mathbf{F}$ var konservativt? Ge något exempel av ett konservativt vektorfält samt icke-konservativt vektorfält (motivera dina exempel ordentligt!)

6. Räkna ut integralen

$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz,$$

där kroppen K är den del av klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ som ligger ovan koniska ytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

7. Ett akvarium har en form av en rätvinklig parallelepiped utan locket med längden l, bredden b och höjden h. Det skall rymma $54\,dm^3$ vatten. Botten av akvariumet tillverkas av metallplåt som har ytdensitet $400\,g/dm^2$. Sidoytor tillverkas av glas med ytdensitet $100\,g/dm^2$. Bestäm optimala dimensioner l, b och h så att egen massa av akvariumet är minsta möjliga .

8. Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}=(x,y,1)$$

uppåt genom den del av ytan $z=1-x^2-y^2$ för vilken $z\ge 0$.

9. En partikel som påverkas av kraften

$$\mathbf{F}(x,y)=(x^2\sin(\pi/2+y^3)\,;\ x+y^2x^3\cos(\pi/2+y^3))$$

rör sig moturs längs halvcirkeln $x^2+y^2=4$, $y\ge 0$ från punkten $(2,0)$ till punkten $(-2,0)$. Beräkna det arbetet som kraften urättar.

10. Området D i första kvadranten begränsas av linjerna $y=x$; $y=2x$ samt $2y=x+1$; $2y=x+2$. Bestäm integralen

$$\iint_D x\,dx\,dy.$$

(Ledning: inför nya variabler $u=y/x$ och $v=2y-x$).