Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys (SF1626)

19/3 2010

1a. Vi ser att $f(x, y, z) := z + xy^2z^3$ är en nivåyta. Normalen i punkten $(1, -1, 2)$ pekar i riktningen $\text{grad}f(1, -1, 2)$ och

$$\text{grad}f(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 1 + 3xy^2z^2),$$

vilket ger normalen $(8, -16, 13)$. Punkten $(1, -1, 2)$ ligger i planet och ekvationen för punkterna (x, y, z) i tangentplanet kan skrivas

$$(8, -16, 13) \cdot (x - 1, y + 1, z - 2) = 0,$$

dvs vektorn $(x - 1, y + 1, z - 2)$ är vinkelrät mot normalen, och förenkling ger svaret

$$8x - 16y + 13z = 50.$$

1b. Vi kan använda punkten $(1.1, -0.9, z)$ i tangentplanet som approximation till punkten $(1.1, -0.9, t)$ på ytan och får då $13z = 50-8\cdot 1.1-16\cdot 0.9 = 26-0.8+1.6 = 26.8$. Approximationen blir $z = 2 + 8/130$.

2. Vi använder sfäriska koordinater (r, θ, φ) och får då att punkterna i området ovanför planet $z = 1$ i sfären $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ kan beskrivas av radien $1/\cos\theta \leq r \leq \sqrt{2}$, vinkeln mot $z-axeln$ $0 \leq \theta \leq \pi/4$ och vinkeln i $xy-$planet $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Volymen är, med det sfärsiska volymsmåttet $r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} r^2 dr d\varphi \sin\theta d\theta &= [\varphi]_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}[\frac{r^3}{3}]_{r=1/\cos\theta}^{r=\sqrt{2}}\sin\theta d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/4}(\frac{2^{3/2}\sin\theta}{3} - \frac{\sin\theta}{3\cos^3\theta})\,d\theta \\
&= 2\pi([-\frac{2^{3/2}\cos\theta}{3}]_0^{\pi/4} - [\frac{1}{6\cos^2\theta}]_0^{\pi/4}) \\
&= \pi\frac{4\sqrt{2}-5}{3}.
\end{aligned}$$

3. Kurvintegralen är över randen till kvadraten $D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Vi kan använda Greens formel med $(P, Q) = (y, x)$

$$\int_\gamma y\,dx + x\,dy = \int\int_D \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{=0}\,dxdy = 0.$$

Kurvintegralen med kurvan i positiv led kan också beräknas direkt

$$\int_\gamma y\,dx + x\,dy = \int_0^1 0\ dx + \int_0^1 1\ dy + \int_1^0 1\ dx + \int_1^0 0\ dx = 0.$$

4a. Partiella derivatan blir med kedjeregeln

$$\partial\phi/\partial x = \frac{\partial}{\partial x}\arctan(y/x) = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

4b. Vinkeln ϕ är mellan vektorerna $(x, 0)$ och (x, y). Om y är positiv och konstant och x ökar så minskar vinkel (som är positiv) eftersom triangels bas ökar medan höjden är konstant. Om y är negativ är vinkeln negativ och om x ökar så ökar vinkel (dvs närmar sig noll) på samma sätt.

5. Låt $\mathbf{v} = |(1, 2)|^{-1}(1, 2) = 5^{-1/2}(1, 2)$. Riktningsderivatan av f i riktningen $\mathbf{v}$ blir då

$$0 = f'_{\mathbf{v}}(x, y) = 5^{-1/2}(1, 2) \cdot \operatorname{grad} f(x, y) = 5^{-1/2}(\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y})$$

och vi ser att

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

är den sökta partiella differentialekvationen.

Ett exempel på en lösning är $f(x, y) = 2x - y$.

6. Med radiella koordinater i xy-planet kan paraboloiden beskrivas av $z = r^2$. Området inne i kuben och innanför paraboloiden är $r^2 \le z \le 1$ med vinkel $0 \le v \le \pi/2$. Volymen blir

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1-r^2) r dr dv = \int_0^{\pi/2} dv \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2} [\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

7. Berget har störst lutning där $|\operatorname{grad} z(x,y)|$ är maximal. Vi har

$$\operatorname{grad} z(x,y) = e^{-2x^2-y^2}(-4x, -2y)$$

vilket ger

$$f(x,y) := |\text{grad } z(x,y)|^2 = e^{-4x^2-2y^2}(16x^2 + 4y^2).$$

För att hitta de lokala maximipunkterna hos f söker vi punkterna där dess partiella derivator är noll

$$\begin{aligned} f'_x &= \big(32x - 8x(16x^2+4y^2)\big)e^{-4x^2-2y^2} = 0 \\ f'_y &= \big(8y - 4y(16x^2+4y^2)\big)e^{-4x^2-2y^2} = 0, \end{aligned}$$

vilket ger de lokala extrempunkterna. Sedan kollar vi vilka av dem som ger störst värde på f för att finna det globala maximivärdet. Den första ekvationen ger alternativen $x = 0$ eller $4 - 16x^2 - 4y^2 = 0$. Den andra ekvationen ger alternativen $y = 0$ eller $2 - 16x^2 - 4y^2 = 0$. Om $x = 0$ och $y = 0$ har vi $f(0,0) = 0$, alltså är det ingen maximpunkt. Om $x = 0$ och $2 - 16x^2 - 4y^2 = 0$ får vi $y^2 = 1/2$, dvs $y = \pm 2^{-1/2}$ och $f(0, \pm 2^{-1/2}) = 2e^{-1}$. Om $y = 0$ och $4 - 16x^2 - 4y^2 = 0$ får vi $x = \pm 1/2$ och $f(\pm 2^{-1}, 0) = 4e^{-1}$. Alternativet $4 - 16x^2 - 4y^2 = 0$ och $2 - 16x^2 - 4y^2 = 0$ har ingen lösning. Vi ser att lutningen är maximal i punkterna $(\pm 2^{-1}, 0)$ i riktningen $(\pm 1, 0)$.

8. Vi antar att F och G är $\mathcal{C}^1$-funktioner. Subtraktion av två närliggande punkter på kurvan ger

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,z)dx + F'_y(x,y,z)dy + F'_z(x,y,z)dz \simeq 0 \\ G'_x(x,y,z)dx + G'_y(x,y,z)dy + G'_z(x,y,z)dz \simeq 0 \end{aligned}$$

och när dx går mot noll får vi

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,z) + F'_y(x,y,z)y'(x) + F'_z(x,y,z)z'(x) = 0 \\ G'_x(x,y,z) + G'_y(x,y,z)y'(x) + G'_z(x,y,z)z'(x) = 0 \end{aligned}$$

som ger en lösning av $y'(x)$ och $z'(x)$ om determinanten $(F'_y G'_z - F'_z G'_y)(x,y,z)$ är skild från noll. Eftersom vi får en lösning av $y'(x)$ och $z'(x)$ kan vi då lokalt bestämma y och z som funktion av x.

8b. Villkoret $(F'_y G'_z - F'_z G'_y)(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ ger i detta fall

$$\begin{aligned} F'_y &= -2y_0 \\ F'_z &= -2z_0 \\ G'_y &= -4y_0 \\ G'_z &= 6z_0 \end{aligned}$$

och $(F'_y G'_z - F'_z G'_y)(x_0,y_0,z_0) = -12y_0z_0 - 8y_0z_0$, så villkoret blir $y_0z_0 \neq 0$.

9. Låt $\mathbf{v} = 2^{-1/2}(1,1)$. Vi ser då att

$$u'_{\mathbf{v}}(x,y) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} u(x,y) = 2^{-1/2}(u'_x(x,y) + u'_y(x,y)) = 0,$$

dvs u är konstant i riktningen $\mathbf{v}$; jämför med uppgift 5. För $t \in \mathbf{R}$ gäller då att

$$u(x,y) = u\big((x,y) - t(1,1)\big) = u(x-t, y-t)$$

och $t = y$ ger lösningen $u(x,y) = u(x-y,0) = e^{-(x-y)^2}$ för $x \in \mathbf{R}$ och $y \geq 0$.

10. Den sökta volymen S_n av enhetssimplex i $\mathbf{R}^n$ är integralen $\int_{x_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^n x_j \leq 1} dx_1 \ldots dx_n$. Beräkna denna integral i $\mathbf{R}^n$ genom att integrera i x_n led från noll till ett: för fixt x_n är tvärsnittet ett simplex i $\mathbf{R}^{n-1}$ med sidlängden $1 - x_n$, ty $\sum_{j=1}^{n-1} x_j = 1 - x_n$. Tvärsnittets volym, $\int_{x_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n-1} x_j \leq 1 - x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1}$, blir då $(1-x_n)^{n-1} S_{n-1}$ och den sökta volymen är

$$S_n = \int_0^1 (1-x_n)^{n-1} S_{n-1} dx_n = S_{n-1}[-(1-x_n)^n/n]_0^1 = S_{n-1}/n.$$

Vi ser att $S_1 = \int_0^1 dx_1 = 1$ och rekursionsformeln ger

$$S_n = \frac{S_{n-1}}{n} = \frac{S_{n-2}}{n(n-1)} = \ldots = \frac{S_1}{n!} = \frac{1}{n!}.$$