Tentamen i Flervariabelanalys SF1626 den 19/3 2010 kl 14-19.

Tillåtet hjälpmedel är Beta Mathematics Handbook.

Tydliga lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar krävs för att undvika poängavdrag. Uppgifterna poängsätts med fyra poäng vardera.

Uppgifterna 1-3 svarar mot kontinuerliga examinationen i kursen: bonuspoäng från KS eller projekt n ger automatiskt 3-4 poäng på tal n här, för $n = 1, 2, 3$. För högre betyg krävs att man samlar poäng på uppgift 7-10, så kallade VG- poäng.

Betygsgränser. A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX 14 poäng.

Lycka till!

1a. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z+xy^2z^3 = 10$ i punkten $(x, y, z) = (1, -1, 2)$. (2 poäng)

1b. Antag att punkten $(1.1, -0.9, t)$ ligger på ytan. Bestäm en approximation av t. (2 poäng)

2. Beräkna volymen av den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ som ligger ovanför planet $z = 1$.

3. Beräkna på två olika sätt kurvintegralen

$$\int_\gamma y\,dx + x\,dy,$$

där γ är randen av $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$ i positiv led.

4. I högra halvplanet $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0\}$ definieras den polära vinkeln ϕ genom $\phi = \arctan(y/x)$.

(a) Beräkna $\partial\phi/\partial x$ i H. (2 poäng)

(b) Om du räknat rätt i (a) ser du att $\partial\phi/\partial x$ har olika tecken beroende på om y är positiv eller negativ. Förklara dessa tecken utgående från derivatans definition och polära vinkelns geometriska betydelse. (2 poäng)

5. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion vars riktningsderivata i riktningen $(1, 2)$ är noll i alla punkter. Ange en partiell differentialekvation som f uppfyller. Ge också ett exempel på en sådan funktion f som inte är konstant.

6. Beräkna volymen av den del av kuben $\{(x, y, z)\ ;\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ som ligger inuti paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

7. Höjden av ett berg ges av $z = e^{-2x^2-y^2}$, där z är höjden i meter för positionen (x, y) i planet. Var och i vilken riktning har berget störst lutning?

8a. Antag att kurvan γ i $\mathbb{R}^3$ är skärningen mellan nivåytorna $F(x, y, z) = 0$ och $G(x, y, z) = 0$, det vill säga

$$\gamma : \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Avgör under vilka omständigheter γ lokalt kan skrivas på formen

$$\gamma : \quad \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x), \end{cases} \tag{2}$$

genom att differentiera (1). (2 poäng)

8b. Vad är villkoret för att kurvan

$$\gamma : \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0, \end{cases}$$

kan skrivas på formen (2) nära en punkt (x_0, y_0, z_0) på γ? (2 poäng)

9. Antag att funktionen u satisfierar

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$$

för $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y > 0\}$ och att

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

för $x \in \mathbb{R}$. Bestäm funktionen u i området D.

10. Beräkna n-dimensionella volymen hos det n-dimensionella simplex som ges av olikheterna

$$x_j \geq 0 \quad \text{för } j = 1, 2, 3, \ldots, n \text{ och}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1.$$

Delpoäng ges för uträkningar av specialfall.