Lösningar till tentamen i kurs SF1626 Flervariabelanalys 100524.

1. De stationära punkterna fås ur systemet $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-y} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (2y - y^2 + x^2)e^{-y} = 0 & (2) \end{cases}$

Ur (1) fås $x = 0$ som i (2) ger $y(2-y) = 0$ dvs punkterna (0,0) och (0,2).

Hesses matris $H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2x \\ 2x & 2 - 4y + y^2 - x^2 \end{bmatrix} e^{-y}$. I origo är denna

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Egenvärdena är -2 och +2. Olika tecken ger sadelpunkt. I punkten (0,2)

är Hesses matris $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-2}$ Egenvärdena är båda $-2e^{-2}$. Negativa egenvärden ger lokalt maximum.

2.
$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1+3xy}}\,dxdy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+3xy}} = \int_0^1 x^2 dx \left[\frac{2}{3x}\sqrt{1+3xy}\right]_0^x = \frac{2}{3}\int_0^1 x(\sqrt{1+3x^2} - 1)dx =$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{9}(1+3x^2)^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{27}.$$

3. En normalvektor till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$ är $(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1)$.

Tangentplanets ekvation i punkten ges då av $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y - z = C$ där

$C = a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - f(a,b)$. $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 2y$ ger, vid jämförelse

med det givna planet, systemet: $\begin{cases} 6a - 4b = 8 \\ -4a + 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ Ur detta fås

$C = 8 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - f(2,1) = 5 \neq 1$ dvs det givna planet är inte ett tangentplan till ytan.

4. I punkten (1,0) fås $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-5y}{(x+y)^2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5x}{(x+y)^2} = 5 \Rightarrow \nabla f(1,0) = (0,5)$.

Riktningsderivatan i den givna riktningen ges då av $\nabla f(1,0) \cdot \frac{(4,3)}{5} = 3$. Eftersom riktningsderivatans största värde i punkten (1,0) är $\|\nabla f(1,0)\| = 5$ finns ingen riktning i vilken den har värdet 6.

5 Vi bildar lagrangefunktionen $L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 6y)$. De sökta värdena antas i kritiska punkter till denna eller i punkter som löser systemet

$\begin{cases} \nabla g = \overline{0} \\ g = 0 \end{cases}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 6y$. Detta system saknar lösning och vi studerar alltså

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \quad 2\lambda x \qquad = 0 \quad (1) \\ L'_y = 4y - 8 + \lambda(2y-6) = 0 \quad (2) \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 6y \qquad = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Ur (1) fås $x = 0$ eller $\lambda = -1$.

$x = 0$ ger i (3) : $y(y-6) = 0 \Rightarrow y = 0{,}6$. Det ger punkterna $(0{,}0)$ och $(0{,}6)$.

$\lambda = -1$ ger i (2) : $2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$. Ur (3) fås då $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Det ger punkterna $(\pm\sqrt{5},1)$. $f(0{,}0) = 0$, $f(0{,}6) = 24$, $f(\pm\sqrt{5},1) = -1$.

Det största värdet är alltså 24 och det minsta är -1 .

6. Skärningskurvans projektion på xy – planet ges av

$8 - (x^2 + y^2) = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$. Områdets projektion på xy – planet, D , är då cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 4$. Volymen av området R beräknas:

$$\iiint_R dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{8-(x^2+y^2)} dz = 2\iint_D (4 - (x^2 + y^2))dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 16\pi \text{ ve.}$$

7. Eftersom $\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + 2x - 2y) = e^x \cos y + 2 = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y + 2y)$ är vektorfältet

konservativt. Vi söker en potential U : $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^x \sin y + 2y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^x \cos y + 2x - 2y \end{cases}$ Den första

ekvationen ger $U(x,y) = e^x \sin y + 2xy + f(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = e^x \cos y + 2x + f'(y)$.

Insättning i den andra ekvationen ger $f'(y) = -2y \Rightarrow f(y) = -y^2 + C$. Vi Väljer $C = 0$ och får potentialen $U(x,y) = e^x \sin y + 2xy - y^2$. Integralens värde ges nu av $U(0{,}2) - U(1{,}0) = \sin(2) - 4$.

8. Vi observerar att funktionens definitionsområde är ellipsskivan $4x^2 + y^2 \le 4$. Vi skall undersöka inre punkter och randpunkter.

Inre punkter: $\begin{cases} f_1 = y - \dfrac{4x}{\sqrt{4-(4x^2+y^2)}} = 0 \ \ (1) \\ f_2 = x - \dfrac{y}{\sqrt{4-(4x^2+y^2)}} = 0 \ \ (2) \end{cases}$ $y \cdot (1) - 4x \cdot (2) \Rightarrow y^2 - 4x^2 = 0$. Vi får

$y = \pm 2x$. Detta insatt i (1) ger $2x(\pm 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}) = 0$ där endast + tecknet är möjligt.

Vi får $x = 0$ och $\sqrt{1-2x^2} = 1 \Rightarrow x = 0$. Det ger att origo är den enda kritiska punkten.

Randpunkter: På randen gäller $f(x,y) = xy$ och $y = \pm 2\sqrt{1-x^2}$. Ur detta fås $g(x) = f(x, \pm 2\sqrt{1-x^2}) = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. Vi undersöker nu denna funktions största och minsta värde: $g'(x) = \pm 2(\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}) = \pm 2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Det ger de kritiska punkterna $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$, $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$.

Ändpunkterna i definitionsområdet till g är $x = -1$ och $x = 1$. Det ger punkterna (-1,0) och (1,0). Beräkning av funktionsvärdena i alla intressanta punkter ger värdena f = -1 , 0 , 1 och 2 . Det minsta värdet är alltså -1 och det största är 2 .

9. Symmetri ger att integralen är $2\iiint_{R'} xyz\,dxdydz$ där R' är tetraedern med spetsen i punkten (0,0,1) och triangeln $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ som basyta. "Taket" är planet $z = 1-x$ och vi får

$$2\iiint_{R'} xyz\,dxdydz = 2\iint_D xy\,dxdy \int_0^{1-x} z\,dz = \iint_D xy\left[z^2\right]_0^{1-x} dxdy = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx \int_0^x y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx =$$

$$= \ldots = \frac{1}{120}.$$

10. Skålens kant ges av $\begin{cases} z = 4(x^2+y^2) \\ z = x^2 + 3y^2 + 3 \end{cases}$. Projektionen av denna på xy – planet ges av ellipsen $3x^2 + y^2 = 3$. Vatten börjar rinna över den lägst belägna punkten (x, y, z) på skålens kant. Då gäller :

1. (x, y, z) ligger på skålens kant $\Rightarrow z = 4x^2 + 4y^2$
2. (x, y, z) projiceras på ellipsen $3x^2 + y^2 = 3$
3. z är det minsta tal som uppfyller 1. och 2.

Vi söker det minsta värdet av $z = 4x^2 + 4y^2$ då $3x^2 + y^2 = 3$. På ellipsen är $y^2 = 3 - 3x^2 \Rightarrow z = 12 - 8x^2$, $-1 \le x \le 1$. Minsta värdet antas i ändpunkterna och är $z = 4$. Skålen kan alltså maximalt fyllas till nivån av planet $z = 4$. Vi beräknar volymen av den kropp som begränsas av planet $z = 4$ och ytan $z = 4(x^2 + y^2)$. Planet skär ytan längs en kurva vars projektion på xy – planet ges av $4(x^2 + y^2) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Om D är området innanför denna cirkel ges den sökta volymen av

$$\iint_D dxdy \int_{4(x^2+y^2)}^{4} dz = \iint_D (4-4(x^2+y^2))dxdy = \{Polära\,koord\} = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)r\,dr = 2\pi v.e.$$