Lösningsförslag till SF1626 den 7 juni 2010

1. Du skall gå i riktning som ges av $-gradf(1,1)$.

$$gradf(x,y)=\left(\frac{-8x}{\left(1+x^2+2y^2\right)^2},\frac{-16y}{\left(1+x^2+2y^2\right)^2}\right).\ \text{varför} -gradf(1,1)=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

svar $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

2. $P=x^2+y^2, Q=x+2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-2y$. Så Greens sats ger att

$$I=\iint_T (1-2y)\,dx\,dy=\int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{x}(1-2y)dy\right]dx=\int_0^1\left[y-y^2\right]_{y=0}^{y=x}$$

$$\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}.$$

Svar: $I=\oint_\gamma\left(x^2+y^2\right)dx+(x+2)dy=\frac{1}{6}$.

3. $f(x,y)=x+y+\frac{4}{xy^2}$ har derivatan $f'(x,y)=gradf(x,y)=\left(1-\frac{4}{x^2y^2},1-\frac{8}{xy^3}\right)$ som uppfyller $f'(1,2)=(0,0)$.

Andra derivatans test med Hesses matris

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{x^3y^2} & \frac{8}{x^2y^3}\\ \frac{8}{x^2y^3} & \frac{24}{xy^4}\end{pmatrix}\ \text{och}$$

$$f''(1,2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}.$$

Eftersom principalminorerna $A=2$ och $\det\left(f''(1,2)\right)=2$ är strängt positiva är det fråga om ett lokalt minimum och inte ett lokalt maximum.

Svar: Nej

4. Taylorpolynom av grad 2 kring origo.

$$p(x,y)=f(0,0)+x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]=$$

$$=2+2x+y-x^2-4xy-4y^2.$$

Ett approximativt värde av f i punkten $(0.1,0.2)$

$$f(0.1,0.2)\approx p(0.1,0.2)=2+2(0.1)+(0.2)-(0.1)^2-4(0.1)(0.2)-4(0.2)=2.15$$

Svar $f(0.1,0.2)\approx 2.15$.

5. Projektionen av kroppen på *xy*-planet ges av $x^2+y^2\le 1$.

$$M(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[\int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z\,dz\right]dx\,dy=$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}dx\,dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)\right]dx\,dy$$

Nu används polära koordinater

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)\right]dx\,dy=\left[\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},dxdy=rdrd\theta\right]=$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\left(r-r^3\right)dr=\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

6. Arean ges av $\iint\limits_{D}\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$.

$$z=4+3\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z'_x=\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}},z'_y=\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}},(z'_x)^2+(z'_y)^2=9$$

Detta ger att $\iint\limits_{D}\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1+9}\,dx\,dy=\sqrt{10}\iint\limits_{D}dx\,dy=\sqrt{10}$ arean av triangel $D=\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Svar : $\frac{\sqrt{10}}{2}$ a.e

7a. Ellipsen är en kompakt mängd och funktionen är kontinuerlig på denna, detta implicera att funktionen f antar ett största och ett minsta värde på ellipsen.

7b. Vi kan använda t.ex Lagranges metod för att finna största och minsta värden.
Bilda Lagranges funktion
$L(x,y,t)=x+y+t\left(2x^2+y^2-6\right)$ och sök stationära punkter av denna som ges va

$$\nabla L=\bar{0}\Leftrightarrow\begin{cases}L'_x=1+4tx=0 & (1)\\ L'_y=1+2ty=0 & (2)\\ L'_t=2x^2+y^2-6=0 & (3)\end{cases}$$

(1) och (2) ger att $2x=y$ in i (3) som ger $2x^2+x^2=6\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$.
Stationära punkter blir $(x,y)=(x,2x)=\mp(1,2)$. Vi får $f(1,2)=2,\quad f(-1,-2)=-3$

Svar: 3 och –3.

8. För $z=f(x,y)=f\left(x^2+y\right)$ som i texten, ger kedjeregeln

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(x^2+y\right)2x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\left(x^2+y\right)2x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=f''\left(x^2+y\right)4x^2+f'\left(x^2+y\right)2.$$

Insättning i den givna diff.ekv $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(x^2+y\right)z=0$ ger

$$f''\left(x^2+y\right)4x^2+f'\left(x^2+y\right)2-2xf''\left(x^2+y\right)2x+\left(x^2+y\right)f\left(x^2+y\right)=0$$
vilket ger

$$f'\left(x^2+y\right)2+\left(x^2+y\right)f\left(x^2+y\right)=0\,.$$
Om vi sätter $t=x^2+y$ så fås
$2f'(t)+tf(t)=0$ som kan lösas som en ordinär linjär diff. ekv (eller separabel)

vi får $f(t)=Ke^{-\frac{t^2}{4}}$, för en gotycklig konstant *K*.

Svar: $f(x,y)=Ke^{-\frac{\left(x^2+y\right)^2}{4}}$ ..

9. den sökta volymen ges av $V=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}-\left(2e^{x^2+y^2}-4\right)dxdy=\iint\limits_D (4-e^{x^2+y^2})\,dx\,dy$, där

randen till *D är skärningskurvan* $2e^{x^2+y^2}-4=e^{x^2+y^2}\Leftrightarrow e^{x^2+y^2}=4\Leftrightarrow x^2+y^2=\ln 4$ Vilket ger att $D=\left\{(x,y):x^2+y^2\le \ln 4\right\}$.

Vi får $\iint\limits_D (4-e^{x^2+y^2})\,dx\,dy=$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\ln 4}(4-e^{x^2+y^2})\,dx\,dy=4\pi\ln 4-\iint\limits_{x^2+y^2\le\ln 4}-e^{x^2+y^2}\,dx\,dy=\left[\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},dxdy=rdrd\theta\right]=$$

$$=4\pi\ln 4-2\pi\int_0^{\sqrt{\ln 4}}e^{r^2}r\,dr=2\pi\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^{\sqrt{\ln 4}}=4\pi\ln 4-\pi\left(e^{\ln 4}-1\right)=4\pi\ln 4-3\pi=\pi\left(8\ln 2-3\right)$$

Svar : $\pi\left(8\ln 2-3\right)$ v.e

10. För att få ett gränsvärde$\neq 0$ måste täljaren och närmaren gå mot 0” lika fort” då $(x,y)\to(0,0)$ längs kurvan *C*.

Vi kan åstadkomma detta genom till exempel gå längs $x=y^2$, då blir

$f\left(y^2,y\right)=\dfrac{y^2}{y^4+y^2}\to 1$, då y $\to 0$.

Svar: Ja . Gå längs kurvan $x=y^2$.