KTH matematik

Tentamen i SF1626 Flervariabelanalys
den 7 juni 2010 kl 8.00-13.00

Tillåtet hjälpmedel: Endast Beta Mathematics Handbook.
Tydliga lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar krävs för att undvika poängavdrag. Uppgifterna poängsätts med fyra poäng vardera.
Uppgifterna 1-3 svarar mot kontinuerliga examinationsmoment i kursen, på det sätt som framgår av kurs-PM. Den som är godkänd på ett sådant moment har automatiskt 3-4 poäng på motsvarande uppgift, som då inte behöver lösas. För högre betyg krävs att man samlar en del poäng på uppgifterna 7-10, s k VG-poäng.
Preliminära betygsgränser: A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B:26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C:21 poäng varv minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX:14 poäng.

1. En kulle beskrivs approximativt av funktionen $z = f(x,y) = \dfrac{4}{1+x^2+2y^2}$ i lämpliga enheter där z är höjden. Om du befinner dig i punkten $(1,1,1)$, i vilken riktning i $xy-$planet kan du gå brantast nedåt.

2. Låt T vara det triangulära området med hörn i punkterna $(0,0),(1,0)$ och $(1,1)$, och låt γ vara den positivt orienterade randen av T. Beräkna kurvintegralen

$$I = \oint_\gamma \left(x^2+y^2\right)dx + (x+2)dy.$$

3. Är punkten $(1,2)$ ett lokalt maximum till $f(x,y) = x+y+\dfrac{4}{xy^2}$?

4. Beräkna Taylorpolynomet av andra graden till funktionen $f(x,y) = 2x+y+2\cos(x+2y)$ omkring punkten $(0,0)$, och använd sedan detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av funktionen f i punkten $(0.1,0.2)$.

5. Låt området $\Omega = \left\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\right\}$, det vill säga en kon med spets i origo som begränsas av planen *z=0* och *z=1.*
   Beräkna $\iiint\limits_\Omega z\,dx\,dy\,dz.$

6. Beräkna arean av den del av konen $z = 4+3\sqrt{x^2+y^2}$ över triangeln D med hörnen i punkterna $(0,0),(1,0)$ och $(1,1)$.

Var god vänd

7. Betrakta funktionen $f(x,y) = x + y$ och ellipsen $2x^2 + y^2 - 6 = 0$.
   a) Förklara (ange en sats) varför man i förväg kan påstå att f antar ett största och ett minsta värde på ellipsen.
   b) Bestäm dessa värden.

8. Låt f vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av en reell variabel. Sätt $z = z(x,y) = f\left(x^2 + y\right)$. Bestäm de funktioner f som uppfyller den partiella differentialekvationen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(x^2 + y\right)z = 0$.

9. Bestäm volymen av kroppen som definieras av olikheten

$$2e^{x^2+y^2} - 4 \le z \le e^{x^2+y^2}.$$

10. Finns det någon kurvan C som går genom $(0,0)$ sådan att funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (x,y) \ne (0,0)$$

har ett positivt gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ längs C?

Lycka till