Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen 2010-08-19 (14.00-19.00) i Flervariabelanalys SF1626; SF1601 (5B1105) Diff- och integralkalkyl I, del 2; och SF1655 Webbaserad kurs i flervariabelanalys

Tillåtet hjälpmedel är Beta Mathematics Handbook.

Ange gärna dina bonuspoäng på tentans omslag, t.ex. $(4, 0, 4)$.

Tydliga lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar krävs för att undvika poängavdrag. Uppgifterna poängsätts med fyra poäng vardera.

Uppgifterna 1-3 svarar mot kontinuerliga examinationen i kursen: bonuspoäng från KS eller projekt n ger automatiskt 3-4 poäng på tal n här, för $n = 1, 2, 3$. *För högre betyg krävs att man samlar poäng på uppgift 7-10, så kallade VG- poäng.*
Betygsgränser. A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX 14 poäng.
Lycka till!

1. Beräkna riktningsderivatan i riktningen $(1, 1)$ till funktionen $f(x, y) = e^{-(x-y)^2}$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$.

2. Skriv mängden

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, z^2 - 4x^2 - y^2 = 0, \quad z \leq 0\}$$

som en funktionsgraf.

3a. Bestäm den linjära approximationen till funktionen $f(x, y) = x^2y + x + y + 1$ i en omgivning till punkten $(x, y) = (1, 1)$.
3b. Uppskatta approximationens fel i området $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = 1,\ |x - 1| \leq \frac{1}{4}\}$.

4. Området D bestäms av olikheterna $x \geq 0$ och $y \geq 3x$. Beräkna den generaliserade integralen

$$\iint_D \exp(-y^2)\, dxdy.$$

5. Ellipsoiden $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 97$ och konen $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ går båda genom punkten $(3, 2, 5)$. Bestäm en tangentvektor till ytornas skärningskurva i $(3, 2, 5)$.

6. Beräkna volymen av kroppen som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7. Bestäm punkten (x, y, z) på ytan $z = e^{-(x^2+y^2)/2}$ som ligger närmast origo.

8. Låt f vara en differentierbar funktion. Figur 1 visar definitionsområdet till funktionen, med några nivåkurvor inritade. I området mellan de angivna nivåkurvorna antar funktionen bara mellanliggande värden.

8a. Ange i figuren de punkter (x, y) sådana att funktionsvärdet i dessa punkter är 1. (1 poäng)

8b. Ange i figuren punkterna där $\partial f/\partial y = 0$. (1 poäng)

8c. Ange i figuren punkterna där $\partial f/\partial x < 0$. (2 poäng)

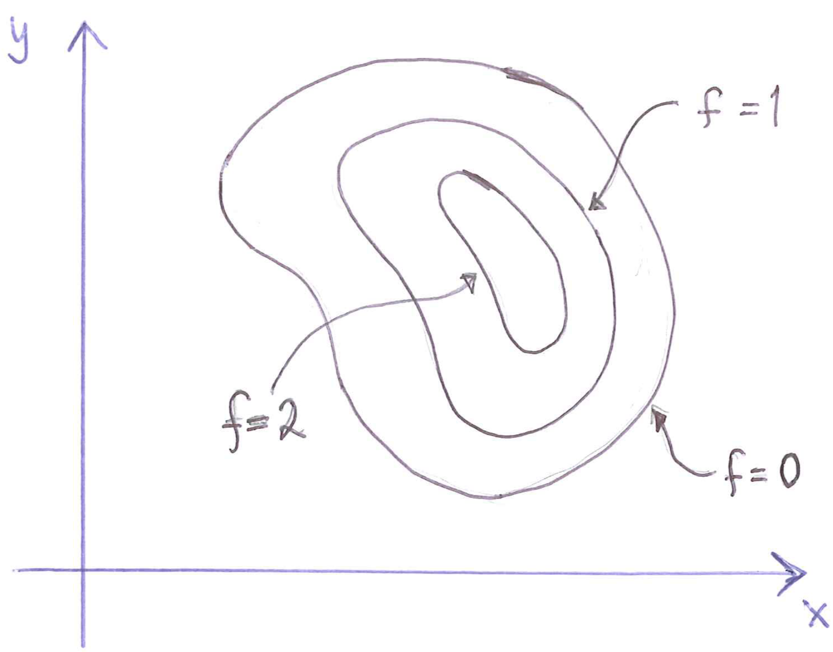

FIGURE 1. Några nivåkurvor hörande till funktionen f.

9. Nollställemängden till ekvationen $4x^2 + 9y^2 = 13$ beskriver en ellips E. Kurvan γ börjar i punkten $(-1, 1)$ och följer ellipsbågen E medurs fram till punkten $(-1, -1)$. Beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

när $\mathbf{F}$ är vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$.

10. För vilka $a \in \mathbb{R}$ kan $\mathbf{F}(x, y) = (y, ax)$ vara gradient? Ge exempel på en kurvintegralegenskap som gäller speciellt för vektorfält som är gradienter.