Tentamen SF1626, Analys i flera variabler, 2010-12-18
Svar och lösningsförslag

1. Låt $f(x,y) = ye^x - y$. Bestäm största och minsta värde till f på den slutna kvadraten med hörn i $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$.

Lösning. f är kontinuerlig i hela xy-planet och speciellt på den slutna kvadraten K med hörn i $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$, vilket medför att f säkert antar ett största och minsta värde på K. Dessa extremvärden måste antas i antingen

1. en inre punkt, och eftersom funktionen är överallt deriverbar måste detta ske i en kritisk punkt,
2. en punkt på randkurvan förutom hörnen, eller
3. i hörnpunkterna.

1. $f'_x = ye^x$ och $f'_y = e^x - 1$. Man ser direkt att

$$f'_x = 0 \iff y = 0, f'_y = 0 \iff x = 0$$

så $(0,0)$ är enda kritiska punkt, och den ligger i det inre av K.

2. Vi söker efter möjliga extrempunkter på linjestyckena som utgör K:s rand, exklusive hörn.

Kanten där $y = 1$ parametriseras som $x = t$, $y = 1$, $-1 < t < 1$, och f:s restriktion till denna kant ges av $h(t) = f(t,1) = e^t - 1$ med derivata $h'(t) = e^t \neq 0$, vilket gör att extremvärden saknas längs denna del av randen.

Kanten där $y = -1$ parametriseras som $x = t$, $y = -1$, $-1 < t < 1$, och f:s restriktion till denna kant ges av $h(t) = f(t,-1) = -e^t + 1$ med derivata $h'(t) = -e^t \neq 0$, vilket gör att extremvärden saknas längs denna del av randen.

Kanten där $x = 1$ parametriseras som $x = 1$, $y = t$, $-1 < t < 1$, och f:s restriktion till denna kant ges av $h(t) = f(1,t) = (e-1)t$ med derivata $h'(t) = e - 1 \neq 0$, vilket gör att extremvärden saknas längs denna del av randen.

Kanten där $x = -1$ parametriseras som $x = -1$, $y = t$, $-1 < t < 1$, och f:s restriktion till denna kant ges av $h(t) = f(-1,t) = (1-e)t$ med derivata $h'(t) = 1 - e \neq 0$, vilket gör att extremvärden saknas längs denna del av randen.

Alltså måste största eller minsta värde antas antingen i den inre kritiska punkten $(0,0)$ eller i någon av hörnpunkterna. Vi jämför värden:

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = e-1, \quad f(1,-1) = 1-e, \quad f(-1,1) = 1/e-1, \quad f(-1,-1) = 1-1/e.$$

Eftersom

$$e - 1 > 1 > 1 - 1/e > 0 > 1/e - 1 > 1 - e$$

får vi

SVAR: Största värde är $f(1,1) = e - 1$ och minsta värde $f(1,-1) = 1 - e$.

---

2. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{y^2}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \right) dy$$

genom att byta integrationsordning.

Lösning. Ett försök att beräkna integralen direkt ger inte något svar eftersom integralen

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

inte kan uttryckas i elementära funktioner.

Man skall istället tolka hela ursprungliga integralen som en dubbelintegral. Eftersom den inre integralen har gränserna $y^2 \leq x < +\infty$ får vi följande olikhet som definierar integrationsomrâi planet: $y^2 \leq x$. Området ligger till höger om parabeln $y^2 = x$. En alternativ beskrivning av samma område är olikheterna $-\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x$. De ger oss nya gränser för integralen där den yttre integralen tas m a på x och den inre tas m a på y:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dy = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\, dx = \int_0^{\infty} 2e^{-x}\, dx = 2.$$

SVAR: 2

---

3. För funktionen $f(x, y)$ gäller att $\operatorname{grad} f = (3x^2y^2 + y^3, 3xy^2 + 2x^3y)$ och $f(1, 1) = 0$.

(a) Bestäm funktionen f.

(b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1, 1)$ i riktning mot origo.

Lösning. (a) $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (3x^2y^2 + y^3, 3xy^2 + 2x^3y)$. Vi får från detta att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + y^3 \implies f(x, y) = x^3y^2 + xy^3 + h(y).$$

Vi deriverar detta uttryck för f m a p y och jämför med $\frac{\partial f}{\partial y}$ vilket ger

$$2x^3y + 3xy^2 + h'(y) = 3xy^2 + 2x^3y \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = C(\text{konstant})$$

. Så $f(x, y) = x^3y^2 + xy^3 + C$. Villkoret $f(1, 1) = 0$ ger $C = -2$.

(b) $\mathbf{v} = -1/\sqrt{2}(1, 1)$ är den enhetsvektor som avsatt i punkten $(1, 1)$ pekar mot origo. Enligt sats kan nu den sökta riktningsderivatan beräkans som

$$(D_{\mathbf{v}} f)(1, 1) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(1, 1) = -1/\sqrt{2}(1, 1) \cdot (4, 5) = \frac{-9\sqrt{2}}{2}.$$

SVAR: (a) $f(x, y) = x^3y^2 + xy^3 - 2$ (b) $\dfrac{-9\sqrt{2}}{2}$

---

4. Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till $f(x,y) = \ln(x^2+3y^2)$ i punkten $(1/2,-1/2)$, och beräkna sedan med hjälp av detta ett approximativt värde på $f(0.6,-0.4)$.

Lösning. Vi inför beteckningen $Q = (1/2,-1/2)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \ln(x^2+3y^2), & f(Q) &= \ln 1 = 0\\
f'_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+3y^2}, & f'_x(Q) &= 1\\
f'_y(x,y) &= \frac{6y}{x^2+3y^2}, & f'_y(Q) &= -3\\
f''_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+3y^2)-4x^2}{(x^2+3y^2)^2}, & f''_{xx}(Q) &= 1\\
f''_{xy}(x,y) &= \frac{-12xy}{(x^2+3y^2)^2}, & f''_{xy}(Q) &= 3\\
f''_{yy}(x,y) &= \frac{6(x^2+3y^2)-36y^2}{(x^2+3y^2)^2}, & f''_{yy}(Q) &= -3
\end{aligned}$$

Taylors formel ger nu sökt andra ordningens Taylorpolynom $P(x,y)$

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= f(Q) + f'_x(Q)\left(x-\frac{1}{2}\right) + f'_y(Q)\left(y+\frac{1}{2}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(Q)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2f''_{xy}(Q)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) + f''_{yy}(Q)\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right)\\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right) - 3\left(y+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Vi approximerar f:s värde i punkten $(0.6,-0.4)$ m h a P

$$\begin{aligned}
&f(0.6,-0.4) \approx P(0.6,-0.4)\\
&= (0.6-0.5) - 3(-0.4+0.5) + \frac{1}{2}(0.6-0.5)^2 + 3(0.6-0.5)(-0.4+0.5) - \frac{3}{2}(-0.4+0.5)^2\\
&= -0.18
\end{aligned}$$

SVAR: $P(x,y) = \left(x-\frac{1}{2}\right) - 3\left(y+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$, $f(0.6,-0.4) \approx -0.18$.

---

5. Kroppen K i rymden begränsas av ytorna $z = x^2+y^2$ och $x^2+y^2+z^2 = 2$.

(a) (2p) Beskriv kroppen med hjälp av olikheter i antingen cylindriska eller sfäriska koordinater (valet är ditt).

(b) (2p) Räkna ut integralen

$$\iiint_K z\,dxdydz$$

med hjälp av ett lämpligt koordinatbyte.

Lösning. Ytan $z = x^2+y^2$ är en rotationsparaboloid med rotation kring z-axeln och ytan $x^2+y^2+z^2 = 2$ är en sfär med centrum i origo och radie $\sqrt{2}$. Det är klart att kroppen beskrivs av olikheten

$$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}.$$

Om man övergår till cylindriska koordinater $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$, får man $x^2 + y^2 = r^2$ och kroppen ges av olikheterna

$$r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Beskrivning i sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ är lite svårare. Vi får $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$ och olikheterna som beskriver kroppen blir då $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (det är villkor som ger oss rotation kring z-axeln), $r \leq \sqrt{2}$ (vilket motsvarar $z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$) och

$$r^2\sin^2\theta \leq r\cos\theta,$$

(vilket motsvarar $x^2 + y^2 \leq z$). Vi ser att den sista olikheten ger oss

$$r \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Denna olikhet och villkoret $r \leq \sqrt{2}$ skall uppfyllas samtidigt och man måste skilja på två fall:

Fall 1: $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \leq \sqrt{2}$. Man ser att detta motsvarar $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. För sådana θ får man villkoret

$$r \leq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Fall 2: $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \geq \sqrt{2}$. Man ser att detta motsvarar $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. För sådana θ får man villkoret $r \leq \sqrt{2}$.

Nu beräknar vi integralen

$$\iiint_K z\,dxdydz.$$

Det är lättare att använda cylindrical koordinater. Olikheten

$$r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}$$

kan uppfyllas endast om $r^2 \leq \sqrt{2 - r^2}$ vilket ger oss villkor $r \leq 1$. Integralen blir (vi glömmer inte Jakobian $J = r$)

$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z \cdot r\,dz =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{2 - r^2}{2} - \frac{r^4}{2}\right) r\,dr = \frac{7\pi}{12}.$$

SVAR: (a) se ovan (b) $\frac{7\pi}{12}$

---

6. En partikel som påverkas av kraften $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^{-y}, x - x^2e^{-y})$ rör sig längs parabeln $y = 4 - x^2$ från punkten $(2, 0)$ till punkten $(-2, 0)$. Beräkna det arbetet som kraften uträttar.

Lösning. Kraftens arbete ges av kurvintegralen

$$\int_\gamma \left(2xe^{-y}\,dx + (x - x^2e^{-y})\,dy\right),$$

där γ är parabelstycket given i uppgiften. Vi kompletterar kurvan γ till en sluten kurva genom att addera intervallet C på x-axeln från punkten $(-2, 0)$ till punkten $(2, 0)$. Låt γ_1 beteckna erhållna slutna kurvan.

Enligt Greens formel kan integralen längs γ_1 förvandlas till dubbelintegralen

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

där D är området mellan parabeln $y = 4 - x^2$ oxh x-axeln och vi räknar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2xe^{-y} + 2xe^{-y} = 1.$$

Dubbelintegralen blir då arean av området D som räknas m h av envariabelintegralen

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}.$$

Vi har således

$$\int_\gamma \left(2xe^{-y}\, dx + (x - x^2 e^{-y})\, dy\right) + \int_C \left(2xe^{-y}\, dx + (x - x^2 e^{-y})\, dy\right) = \frac{32}{3}.$$

Det återstår att undersöka integralen längs intervallet C. En parametrisering av C är $x = x$, $y = 0$ och $-2 \leq x \leq 2$ vilket ger $dy = 0$ och

$$\int_C \left(2xe^{-y}\, dx + (x - x^2 e^{-y})\, dy\right) = \int_{-2}^{2} 2x\, dx = 0.$$

Alternativt kan man beräkna kurvintegralen direkt genom att parametrisera parabelbågen på lämpligt sätt, och sedan utnyttja att två av de tre resulterande enkelintegralerna är udda funktioner över ett origo-symmetriskt interval och följaktligen $= 0$.

SVAR: 32/3

---

7. Låt $f(x, y, z) = 2yz + xz^3 + 5$.

(a) Visa att nivåytan $f(x, y, z) = 0$ kan beskrivas som en funktionsyta på formen $z = h(x, y)$ i en omgivning till punkten $(1, 2, -1)$. (2p)

(b) I vilken riktning växer funktionen f snabbast om man befinner sig i punkten $(1, 2, -1)$? (1p)

(c) I vilken riktning växer funktionen h snabbast om man befinner sig i punkten $(1, 2)$? (1p)

Lösning. (a) Vi kontrollerar först att $f(1, 2, -1) = 0$.

Vi beräknar sedan $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2y + 3xz^2$ och finner att $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) = 4 + 3 = 7 \neq 0$.

Enligt implicita funktionssatsen gäller då att det finns en funktion $h(x, y)$ definerad i en omgivning till $(1, 2)$ sådan att $f(x, y, h(x, y)) = 0$, dvs nivåytan $f(x, y, z) = 0$ kan skrivas som funktionsytan $z = h(x, y)$ i en omgivning till punkten $(1, 2, -1)$.

(b) f växer i en punkt P snabbast i riktningen $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2y + 3xz^2.$$

Alltså växer f i punkten $(1, 2, -1)$ snabbast i riktningen

$$\nabla f(1, 2, -1) = (-1, -2, 7).$$

(c) h växer på motsvarande sätt i punkten $(1, 2)$ snabbast i riktningen $\nabla h(1, 2)$. Vi har att

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{z^3}{2y + 3xz^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-2z}{2y + 3xz^2}$$

så följaktligen är $\nabla h(1, 2) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$

SVAR: (a) Se ovan (b) $(-1, -2, 7)$ (c) $(1, 2)$.

---

8. Ett champagneglas tillverkas i form av en rotationsyta som fås om parabelstycket $z = 2x^2$, $-2\,\text{cm} \le x \le 2\,\text{cm}$ i xz-planet roterar ett varv kring z-axeln. Glasets tjocklek varierar med höjden så att ytdensitet är $\rho = \frac{1}{\sqrt{1+8z}}\,\text{g/cm}^2$ på höjden z. Bestäm glasets massa.

Lösning. Massan ges av ytintegralen

$$M = \iint_Y \rho\, dS = \iint_Y \frac{dS}{\sqrt{1 + 8z}},$$

där Y är rotationsytan som beskriver glaset. Att övergå från parabeln $z = 2x^2$ till rotationsytan kring z-axeln innebär att ersätta koordinaten x med cylindriska koordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alltså, ytans ekvation är $z = 2(x^2 + y^2)$ och variablerna (x, y) ligger i cirkelskivan $C : x^2 + y^2 \le 4$.

Parametriseringen av ytan blir då $x = x$, $y = y$, $z = 2(x^2 + y^2)$, där variablerna (x, y) (som även fungerar som parametrar) ligger i cirkelskivan C. Ytareaelementet ges av standardformeln $dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy$, vilket ger oss $dS = \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}\, dxdy$.

Massan blir då

$$M = \iint_C \frac{\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}{\sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)}} = \iint_C 1\, dxdy = \text{Area}(C) = 4\pi.$$

SVAR: 4π

---

9. (a) Beräkna med hjälp av Gauss sats (Divergensatsen) flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ ut ut den kropp som begränsas av ytorna $z = 1 - x^2 - y^2$ och $z = 0$. (2p)

(b) Beräkna den del av flödet som går igenom den buktiga delen av begräsningsytan i (a). (2p)

Lösning. (a) Vi betecknar med K den givna kroppen, och med ∂K dess rand. De två begränsningsytorna till K skär varandra i xy-planet ($z = 0$) längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Om $\mathbf{N}$ betecknar det utåtrikatade enhetsnormalfältet på ∂K gäller att

$$\Phi = \mathbf{F}\text{:s flöde ut ur K} \overset{\text{definition}}{=} \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS \overset{\text{Gauss sats}}{=} \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

Vi har att $\operatorname{div}(P, Q, R) = P'_x + Q'_y + R'_z$, så $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$. Alltså är

$$\Phi = 3 \iiint_K dV = 3 \iint_{x^2+y^2\leq 1} (1-x^2-y^2)\, dxdy = [\text{byt till polära koord. och beräkna}] = \frac{3\pi}{2}.$$

(b)

$$\iint\limits_{\text{buktiga ytan}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint\limits_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS - \iint\limits_{\text{plana bottenytan}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Vidare gäller att

$$\iint\limits_{\text{plana bottenytan}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1, z=0} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1, z=0} -z\, dxdy = 0.$$

eftersom $z = 0$.

SVAR: (a) $3\pi/2$ (b) $3\pi/2$
