KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen 18 december 2010, kl 13.00 - 18.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg
Kursansvariga: Serguei Shimorin

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

(1) Låt $f(x,y) = ye^x - y$. Bestäm största och minsta värde till f på den slutna kvadraten med hörn i $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$.

(2) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{y^2}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \right) dy$$

genom att byta integrationsordning.

(3) För funktionen $f(x,y)$ gäller att $\operatorname{grad} f = (3x^2y^2 + y^3, 3xy^2 + 2x^3y)$ och $f(1,1) = 0$.

(a) Bestäm funktionen f.

(b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1,1)$ i riktning mot origo.

Del B

(4) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till $f(x,y) = \ln(x^2 + 3y^2)$ i punkten $(1/2, -1/2)$, och beräkna sedan med hjälp av detta ett approximativt värde på $f(0.6, -0.4)$.

(5) Kroppen K i rymden begränsas av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(a) Beskriv kroppen med hjälp av olikheter i antingen cylindriska eller sfäriska koordinater (valet är ditt). (2p)

(b) Beräkna integralen

$$\iiint_K z\, dxdydz$$

med hjälp av ett lämpligt koordinatbyte. (2p)

(6) En partikel som påverkas av kraften $\mathbf{F}(x,y) = (2xe^{-y}, x - x^2e^{-y})$ rör sig längs parabeln $y = 4 - x^2$ från punkten $(2,0)$ till punkten $(-2,0)$. Beräkna det arbete som kraften uträttar.

Del C

(7) Låt $f(x, y, z) = 2yz + xz^3 + 5$.

(a) Visa att nivåytan $f(x, y, z) = 0$ kan beskrivas som en funktionsyta på formen $z = h(x, y)$ i en omgivning till punkten $(1, 2, -1)$. (2p)

(b) I vilken riktning växer funktionen f snabbast om man befinner sig i punkten $(1, 2, -1)$? (1p)

(c) I vilken riktning växer funktionen h snabbast om man befinner sig i punkten $(1, 2)$? (1p)

(8) Ett champagneglas tillverkas i form av den rotationsyta som fås om parabelstycket $z = 2x^2$, $-2\,\text{cm} \leq x \leq 2\,\text{cm}$ i xz-planet roterar ett varv kring z-axeln. Glasets tjocklek varierar med höjden så att ytdensiteten är $\rho = \frac{1}{\sqrt{1+8z}}\,\text{g/cm}^2$ på höjden z. Bestäm glasets massa.

(9) (a) Beräkna med hjälp av Gauss sats (Divergensatsen) flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ ut ut den kropp som begränsas av ytorna $z = 1 - x^2 - y^2$ och $z = 0$. (2p)

(b) Beräkna den del av flödet som går igenom den buktiga delen av begräsningsytan i (a). (2p)