SF1626 Flervariabelanalys
Svar och lösningsförslag till Tentamen 14 mars 2011, 08.00 - 13.00

(1) Visa att funktionen $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2} + x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ är en lösning till differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

Lösning: Vi beräknar de partiella derivatorna
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\frac{y^4}{x^3} + 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)(-1)\frac{y}{x^2}.$$
och
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4\frac{y^3}{x^2} + x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}.$$
Insatt i den givna ekvationen får vi

$$\text{V.L.} = x\left(-2\frac{y^4}{x^3} + 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)(-1)\frac{y}{x^2}\right) + y\left(4\frac{y^3}{x^2} + x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\right)$$
$$= 2\frac{y^4}{x^2} + 2x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 2f(x,y)\text{H.L.}$$

Funktionen $f(x,y)$ uppfyller alltså given differentialekvation.

---

(2) Beräkna volymen av det område som ligger mellan ytorna
$z = 3x^2 + 3y^2 + 10$ och $z = 18 + x^2 + y^2$.

Lösning: Skärningskurvans projektion på xy-planet ges av
$3x^2+3y^2+10 = 18+x^2+y^2 \iff 2x^2+2y^2 = 8 \iff x^2+y^2 = 4$. Alltså ligger området ovanför cirkelskivan $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4.\}$ (Anmärkning: Ytorna är rotationsparaboloider.)

Vi betecknar $f_1(x,y) = 3x^2+3y^2+10$ och $f_2(x,y) = 18+x^2+y^2$. Substitutionen $(x,y) = (0,0)$ i båda funktioner visar att $f_2(x,y) \geq f_1(x,y)$ för $(x,y) \in D$.
Därför
$$V = \int\int_D (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy = \int\int_D (8 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$$
Med hjälp av polära koordinater $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, dxdy = rdrd\phi$ får vi
$$V = \int\int_D (8-2r^2)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (8r - 2r^3)dr = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

Svar: 16π.

---

(3) Vektorfältet **F** ges av $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^3, x^2 + 3xy^2)$.

a) Visa att fältet **F** är konservativt och bestäm en potentialfunktion till **F**.

b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ då γ löper längs parabeln $y = x^2$ från punkten $(1,1)$ till punkten $(2,4)$.

Lösning: a) Sätt $P(x,y) = 2xy + y^3$ och $Q(x,y) = x^2 + 3xy^2$, så att $\mathbf{F} = (P,Q)$. Eftersom $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 3y^2 = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i hela planet har **F** en potential $U(x,y)$ i hela planet sådan att $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ och $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.Vi bestämmer U:

$$U = \int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx = \int P\, dx = \int 2xy + y^3\, dx = x^2y + xy^3 + h(y)$$

där $h(y)$ är någon tillsvidare obekant funktion. Genom att nu derivera detta utryck för U med avseende på y och kräva att detta är lika med Q får vi

$x^2+3xy^2+h'(y) = x^2+3xy^2 \implies h'(y) = 0 \implies h(y) = C,$ där C är en godtycklig konstant.

Vi väljer $C = 0$ och får potenialen $U(x,y) = x^2y + xy^3$.

b) Eftersom fältet **F** är konservativt ges den sökta integralen av skillnaden i potential, dvs

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(2,4) - U(1,1) = 16 + 128 - 2 = 142$$

(Integralen kan också lätt beräknas genom parametrisering av kurvan.)

Svar: a) T ex $U(x,y) = x^2y + xy^3$ b) 142

---

(4) Funktionen $T(x, y, z) = (2x + 3y)e^{-z}$ beskriver temperaturen i en viss del av rummet.

a) I vilken riktning utgående från punkten $(1, 1, 0)$ är temperaturökningen per längdenhet som störst? (2 p)

b) Beräkna med hjälp av linjär approximation ett närmevärde till hur mycket temperaturen ökar om man rör sig en tiondels längdenhet ifrån punkten $(1, 1, 0)$ i riktning mot punkten $(3, 3, 1)$. (2 p)

Lösning: a) Ökningen är som snabbast i gradientens riktning. Vi beräknar gradienten $\operatorname{grad} T(x, y, z) = (2e^{-z}, 3e^{-z}, -(2x + 3y)e^{-z})$, och i punkten $(1, 1, 0)$ får vi $\operatorname{grad} T(1, 1, 0) = (2, 3, -5)$.

b) Vektorn $\mathbf{v} = (3, 3, 1) - (1, 1, 0) = (2, 2, 1)$ pekar i den angivna riktningen. Vi söker nu en vektor $\mathbf{h} = (h, k, l)$ som pekar i $\mathbf{v}$:s riktning och som har längden $1/10$. Eftersom $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ är $\mathbf{h} = (h, k, l) = 1/30\mathbf{v} = (2/30, 2/30, 1/30)$. Den linjära approximationen till temperaturökningen ΔT ges av

$$\Delta T = \operatorname{grad} T(1, 1, 0) \cdot (h, k, l) = (2, 3, -5) \cdot (2/30, 2/30, 1/30) = 1/6.$$

Svar: a) I gradientens riktning, $\operatorname{grad} T(1, 1, 0) = (2, 3, -5)$. b) Temperaturen ökar med approximativt $1/6$.

---

(5) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K x\,dxdydz$$

då K är det område i rymden som begränsas av de tre koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ samt planet $x - y - z + 1 = 0$.

Lösning: Planet $x - y - z + 1 = 0$ går genom de tre punkterna $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Området K beskrivs av olikheterna (rita figur!) $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1 + x$ och $0 \leq z \leq 1 + x - y$. Vi får

$$\begin{aligned}\iiint_K x\,dxdydz &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1+x}\int_{0}^{1+x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} x \int_{0}^{1+x} [z]_0^{1+x-y}\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} x \int_{0}^{1+x} 1 + x - y\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} x[y + xy - y^2/2]_0^{1+x}\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} x^3/2 + x^2 + x/2\,dx = -1/24.\end{aligned}$$

Svar: -1/24

---

(6) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,-x,4)$ genom den del av ytan $z = 1-x^2-y^2$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Ytstycket är orienterat så att normalvektorfältet har positiv z-komponent.

Lösning: Ytan är en funktionsyta $z = f(x,y)$. Ytan skär xy-planet längs cirkeln $x^2+y^2 = 1$, och $z \geq 0$ är ekivalent med att $x^2+y^2 \leq 1$. Låt D beteckna mängden $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Med normalvektorfältet till ytan (med positiv z-komponent) $\mathbf{n} = (-f'_x, -f'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ ges flödet av

$$\iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dxdy = \iint_D (y,-x,4)\cdot(2x,2y,1)\,dxdy = \iint_D 4\,dxdy = 4\text{Area}(D) = 4\frac{\pi}{4} = \pi.$$

Svar: π.

---

(7) En rektangulär låda utan lock skall tillverkas som rymmer 1 kubikmeter. Bottenytan och framsidan tillverkas av ett material som kostar 5 kronor per kvadratmeter, de övriga tre sidorna tillverkas av ett material som som kostar 1 krona per kvadratmeter. Hur skall lådan dimensioneras för att den totala kostnaden för materialet ska bli så liten som möjligt?

Lösning: Låt $x > 0$ beteckna framsidans och baksidans längd längs bottenytan, $y > 0$ sidoytornas längd längs botteytan och $z > 0$ lådans höjd, i meter. Kostnaden i kronor ges då av

$$f(x,y,z) = 5(xy+xz) + 1(xz+2yz) = 5xy+2yz+6xz.$$

Denna funktion skall minimeras under bivillkoret att volymen $V = xyz$ [m^3] uppfyller $V = 1$. Detta är ekvialent med att $z = \dfrac{1}{xy}$ och vi får det ekvivalenta problemet att minimera

$$g(x,y) = f\left(x,y,\frac{1}{xy}\right) = 5xy + \frac{2}{x} + \frac{6}{y}, \quad x>0, y>0.$$

Vi söker först kritiska punkter i g i första kvadranten.

$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 0 \\ g'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ 5x - \frac{6}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y - \frac{2}{x^2} = 0 \\ \frac{y}{x} = \frac{2y^2}{6x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = l \\ y = 3l \end{cases} \quad \text{där } l = \left(\frac{2}{15}\right)^{1/3}.$$

Tredje ekvationssystemet fås ur det andra genom att först flytta bråkuttrycken till H.L i andra systemet och sedan dividera ledvis. z ges av

$$z = \frac{1}{xy} = \frac{1}{3l^2} = \frac{l}{3l^3} = \frac{l\cdot 15}{3\cdot 2} = \frac{5}{2}l.$$

Vi måste också visa att denna kritsika punkt ger minsta värde för funktionen g definerade på mängden $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x>0, y>0\}$.

Låt $Q_M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \dfrac{1}{M} \leq x, y \leq M^2\}$. Det är en kompakt mängd så g antar säkert största och minsta värde på Q_M för varje $M > 1$, och då g är deriverbar måste detta ske i en inre kritisk punkt eller på randen. För stora värden på M ligger den ovan funna kritiska punkten i Q_M och vidare ser man $g(x,y) \geq M$ på randen till Q_M. För alla stora värden på M måste alltså minmimivärdet antas i den inre kritiska punkten och eftersom värdet på randen $\geq M \longrightarrow \infty$ när $M \longrightarrow \infty$, följer $g(x,y) > M$ för alla (x,y) i första kvadranten men utanför Q_M.

Svar: Fram- och baksidans kant mot bottenytan skall ges längden $x = l$, meter, sidoytornas kant mot botteytan skall ha längd $y = 3l$ meter och höjden skall vara $z = \dfrac{5}{2}l$ meter, där $l = \left(\dfrac{2}{15}\right)^{1/3}$.

---

(8) Bestäm den slutna enkla kurva γ som gör att värdet av kurvintegralen

$$\oint_\gamma (6x^2y + y^3 - 20y)\,dx + (16x - x^3 - 6xy^2)\,dy$$

blir så stort som möjligt när γ genomlöps ett varv moturs.

Lösning: Vi använder först Greens formel. Låt $\Omega = \Omega(\gamma)$ beteckna det område som innesluts av en enkel sluten kurva γ. Greens formel ger

$$\begin{aligned}
&\oint_\gamma (6x^2y + y^3 - 20y)\,dx + (16x - x^3 - 6xy^2)\,dy \\
=&\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(16x - x^3 - 6xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y + y^3 - 20y)\,dxdy \\
=&\iint_\Omega 16 - 3x^2 - 6y^2 - 6x^2 - 3y^2 + 20\,dxdy = \iint_\Omega 36 - 9x^2 - 9y^2\,dxdy \\
=&9\iint_\Omega 4 - x^2 - y^2\,dxdy.
\end{aligned}$$

Denna integral antar sitt största värde när Ω tas som det största område där integranden $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, dvs när γ väljs som cirkeln med ekvation $x^2 + y^2 = 4$

Svar: Cirkeln $\gamma = \{(x,y); x^2 + y^2 = 4\}$ maximerar den givna kurvintegralen.

---

(9) Visa med hjälp av implicita funktionssatsen att lokalt kring punkten $(x,y,z) = (1,-1,1)$ så kan lösningsmängden till ekvationen

$$x^2y + e^{y+z} + xz^2 = 1$$

beskrivas med hjälp av en funktionsyta $y = g(x,z)$. Beräkna därefter $g'_x(1,1)$, $g'_z(1,1)$ och $g''_{xz}(1,1)$.

Lösning: Låt $F(x,y,z) = x^2y + e^{y+z} + xz^2$. Vi verifierar först att $F(1,-1,1) = 1$. Vi beräknar sedan $\partial F/\partial y(1,-1,1)$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + e^{y+z} \quad \text{så} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,-1,1) = 2 \neq 0.$$

Enligt Implicita funktionssatsen existerar då en en funktion $g(x,z)$ defineradei en omgivning till punkten $(1,1)$ sådan att $g(1,1) = -1$ och $F(x, g(x,y), z) = 1$, det vill säga att den givna nivåytan $x^2y + e^{y+z} + xz^2 = 1$ beskrivs av funktionsytan $y = g(x,z)$ i en omgivning till punkten $(1,-1,1)$. Vi beräknar nu de partiella derviatorna av g. Derivering m a p på x ger

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 g(x,z) + e^{g(x,z)+z} + xz^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1) \iff$$
$$2xg(x,z) + x^2\frac{\partial g}{\partial x} + e^{g(x,z)+z}\frac{\partial g}{\partial x} + z^2 = 0.$$

I punkten $(x,z) = (1,1)$ där $g(1,1) = -1$ får vi

$$-2 + 2\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) + 1 = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}.$$

Derivering m a p z ger

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 g(x,z) + e^{g(x,z)+z} + xz^2\right) = \frac{\partial}{\partial z}(1) \iff$$
$$x^2\frac{\partial g}{\partial z} + e^{g(x,z)+z}(\frac{\partial g}{\partial z} + 1) + 2xz = 0$$

och i punkten $(x,z) = (1,1)$ får vi

$$\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(1,1) + 1 + 2 = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{3}{2}.$$

Slutligen beräknar vi den blandade andraderivatan till g. Vi utnyttjar beräkningen av $\frac{\partial g}{\partial x}$ ovan.

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 g(x,z) + e^{g(x,z)+z} + xz^2\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}(1) \iff$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(2xg(x,z) + x^2\frac{\partial g}{\partial x} + e^{g(x,z)+z}\frac{\partial g}{\partial x} + z^2\right) = 0 \iff$$
$$2x\frac{\partial g}{\partial z} + x^2\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x} + e^{g(x,z)+z}(\frac{\partial g}{\partial z} + 1)\frac{\partial g}{\partial x} + e^{g(x,z)+z}\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x} + 2z = 0$$

I punkten $(x,z) = (1,1)$, och med utnyttjande av $g(1,1) = -1$, $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$ och $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{3}{2}$ får vi

$$2\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}(1,1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial x}(1,1) + 2 = 0.$$

vilket ger att $g''_{xz}(1,1) = \frac{5}{8}$.

Svar: $g'_x(1,1) = \frac{1}{2}$, $g'_z(1,1) = -\frac{3}{2}$ och $g''_{xz}(1,1) = \frac{5}{8}$.