SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen 14 mars 2011, 08.00 - 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del A

(1) Visa att funktionen $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2} + x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ är en lösning till differentialekvationen

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

(2) Beräkna volymen av det område som ligger mellan ytorna
$z = 3x^2 + 3y^2 + 10$ och $z = 18 + x^2 + y^2$.

(3) Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^3, x^2 + 3xy^2)$.

a) Visa att fältet $\mathbf{F}$ är konservativt och bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$.

b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ då γ löper längs parabeln $y = x^2$ från punkten $(1,1)$ till punkten $(2,4)$.

Del B

(4) Funktionen $T(x,y,z) = (2x + 3y)e^{-z}$ beskriver temperaturen i en viss del av rummet.

a) I vilken riktning utgående från punkten $(1,1,0)$ är temperaturökningen per längdenhet som störst? (2 p)

b) Beräkna med hjälp av linjär approximation ett närmevärde till hur mycket temperaturen ökar om man rör sig en tiondels längdenhet ifrån punkten $(1,1,0)$ i riktning mot punkten $(3,3,1)$. (2 p)

(5) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K x\, dxdydz$$

då K är det område i rymden som begränsas av de tre koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ samt planet $x - y - z + 1 = 0$.

(6) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 4)$ genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Ytstycket är orienterat så att normalvektorfältet har positiv z-komponent.

Del C

(7) En rektangulär låda utan lock skall tillverkas som rymmer 1 kubikmeter. Bottenytan och framsidan tillverkas av ett material som kostar 5 kronor per kvadratmeter, de övriga tre sidorna tillverkas av ett material som som kostar 1 krona per kvadratmeter. Hur skall lådan dimensioneras för att den totala kostnaden för materialet ska bli så liten som möjligt?

(8) Bestäm den slutna enkla kurva γ som gör att värdet av kurvintegralen

$$\oint_\gamma (6x^2y + y^3 - 20y)\,dx + (16x - x^3 - 6xy^2)\,dy$$

blir så stort som möjligt när γ genomlöps ett varv moturs.

(9) Visa med hjälp av implicita funktionssatsen att lokalt kring punkten $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ så kan lösningsmängden till ekvationen

$$x^2y + e^{y+z} + xz^2 = 1$$

beskrivas med hjälp av en funktionsyta $y = g(x, z)$. Beräkna därefter $g'_x(1, 1)$, $g'_z(1, 1)$ och $g''_{xz}(1, 1)$.
