SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen 28 maj 2011, 09.00 - 14.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del A

(1) Låt $g(x, y) = f(u(x, y))$ där $u(x, y) = x^2 + xy + y^2$ och $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en två gånger deriverbar funktion för vilken det gäller att $f'(3) = 1$ och$f''(3) = 2$.

Beräkna $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ och $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 1)$.

(2) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 e^{x^2}\, dx \right) dy$.

(Tips: Kan man kasta om integrationsordningen?)

(3) Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x, y) = (ay^2, 4xy)$.

Bestäm talet a så att $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ_1 är linjesegmentet från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$ och γ_2 är den del av enhetscirkeln som har samma startpunkt och samma ändpunkt som γ_1.

Beräkna också de givna kurvintegralerna för detta värde på a.

Del B

(4) Låt $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z + 1$.

a) Bestäm tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(2, 0, -1)$. (2 p)

b) Avgör om det finns någon punkt på nivåytan $f(x, y, z) = 0$ där tangentplanet är parallellt med xy-planet. (2 p)

(5) a) Antag att K är en kropp med variabel densitet $\rho(x, y, z)$ [massenhet/volymsenhet]. Motivera varför Ks totala massa m då ges av

$$m = \iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

(1 p)

b) Beräkna massan av en kropp K som begränsas av planen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$ samt $1 + x + y - z = 0$, och vars densitet ges av $\rho(x, y, z) = 2x + 1$. (3 p)

(6) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (3x, 2y, z)$ ut ur kroppen $\mathbf{K}$ som definieras av olikheterna $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ och $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$.

Del C

(7) Vilka värden antar funktionen $f(x, y, z) = xy\sqrt{z}$ på ytstycket $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(8) Låt S vara det ytstycke som ges av parameteriseringen

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

a) Beskriv ytan S med ord och en enkel figur. (1 p)

b) Beräkna ytintegralen $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$. (3 p)

(9) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Definiera vad det betyder att f är kontinuerlig i punkten $(0, 0)$. (1 p)

b) Låt f vara given av

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}, & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ k, & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestäm konstanten k så att f blir kontinuerlig i origo. (3 p)