SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen 8 juni 2011, 08.00 - 13.00
Svar och lösningsförslag

Del A

(1) a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z + xy^2z^3 = 10$ i punkten $(x, y, x) = (1, -1, 2)$. (3p)

b) Punkten $(x, y, z) = (1.1, -0.9, t)$ ligger på ytan $z + xy^2z^3 = 10$. Bestäm med hjälp av det tangentplan som beräknats i a) ett approximativt värde på t. (1p)

Lösning: a) Låt $f(x, y, z) = z + xy^2z^3$. Ytan är då nivåytan $f(x, y, z) = 10$. Eftersom $f(1, -1, 2) = 10$ ligger punkten $(x, y, x) = (1, -1, 2)$ verkligen på ytan. Vi bestämmer de partiella derivatorna av f i $(x, y, x) = (1, -1, 2)$.

$$f'_x(x, y, z) = y^2z^3 \implies f'_x(1, -1, 2) = 8$$
$$f'_y(x, y, z) = 2xyz^3 \implies f'_y(1, -1, 2) = -16$$
$$f'_z(x, y, z) = 1 + 3xy^yz^2 \implies f'_z(1, -1, 2) = 13$$

Det sökta tangentplanet har alltså ekvation

$$8(x - 1) - 16(y + 1) + 13(z - 2) = 0 \iff 8x - 16y + 13z = 50.$$

b) Ett approximativt värde till t fås genom att bestämma det tal s som är sådant att $(x, y, z) = (1.1, -0.9, s)$ uppfyller tangentplanets ekvation.

$$8(1.1 - 1) - 16(-0.9 + 1) + 13(s - 2) = 0 \iff s = 2 + \frac{4}{65} \approx 2.1$$

Svar: a) $8x - 16y + 13z = 50$ b) $t \approx 2 + \frac{4}{65} \approx 2.1$.

---

(2) Beräkna volymen mellan ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och det område i xy-planet som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y > 0$ och $y \geq 0$.

Lösning: Låt K vara den kropp vars volym skall beräknas och låt D vara området i xy-planet som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y > 0$ och $y \geq 0$. Området D ges i poära koordinater av $r \leq 1$ och $0 \leq \phi \leq 3\pi/4$. Volymen $Vol(K)$ ges då av

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} - 0 \, dxdy = \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq 3\pi/4} \sqrt{1 - r^2} \, r dr d\phi \\ &= \int_0^{3\pi/4} d\phi \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2} \, dr = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{2}{3 \cdot (-2)} \left(1 - r^2\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{\pi}{4}$ v.e.

---

(3) Låt $f(x,y) = x^3y^4$. Beräkna riktningsderivatorna

- $f'_{\mathbf{u}}(1,1)$ då $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor som är tangetvektor till kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1,1)$;
- $f'_{\mathbf{v}}(1,1)$ då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor som har positiv x-komponent och är ortogonal mot kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1,1)$.

Lösning: Lösningen bygger på det kända faktumet att $\operatorname{grad} f(a,b)$ är ortogonal mot f:s nivåkurva genom punkten (a,b).

Eftersom $\mathbf{u}$ är parallell med med kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1,1)$ är $\mathbf{u}$ ortogonal mot $\operatorname{grad} f(1,1)$. Vi får

$$f'_{\mathbf{u}}(1,1) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f(1,1) = 0$$

eftersom skalärprodukten av två sinsemellan ortogonal vektorer är $= 0$.

$\mathbf{v}$ är en enhetsvektor parallell med $\operatorname{grad} f(1,1)$. Vi har att

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2y^4, 4x^3y^3) \implies \operatorname{grad} f(1,1) = (3,4),$$

och alltså är $\mathbf{v}$, som också ska positiv x-komponent, $= \dfrac{1}{5}(3,4)$. Vi får

$$f'_{\mathbf{v}}(1,1) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(1,1) = \frac{1}{5}(3,4) \cdot (3,4) = 5$$

Svar: a) 0 b) 5 .

Del B

(4) De reellvärda funktionerna av två variabler $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar i hela $\mathbb{R}^2$ och har Taylorpolynom av grad 2 i origo enligt nedan:

f_1 har andra gradens Taylorpolynom $p_1(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x + y$ i origo.

f_2 har andra gradens Taylorpolynom $p_2(x,y) = 47 - 5x^2 + 3xy - y^2$ i origo.

f_3 har andra gradens Taylorpolynom $p_3(x,y) = x^2 + 10xy + 2y^2$ i origo.

f_4 har andra gradens Taylorpolynom $p_4(x,y) = 4x^2 - 3y^2$ i origo.

Avgör om någon eller några av funktionerna $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ har en lokal extrempunkt i origo. Avgör i så fall också om möjligt vilken typ av extrempunkt det är.

Lösning: Eftersom funktionen f_1 har partiella derivator i origo som båda är 1 ($\neq 0$) så har f_1 ingen lokal extrempunkt i origo.

För funktionen f_2 är båda partiella derivatorna 0 i origo. Vi studerar i funktionens Taylorpolynom den kvadratiska formen $-5x^2 + 3xy - y^2 = -5(x^2 - (3/5)xy + (1/5)y^2) = -5[(x - (3/10)y)^2 + (11/100)y^2]$ som tydligen är negativt definit. Alltså har f_2 en lokal maxpunkt i origo.

För funktionen f_3 är båda partiella derivatorna 0 i origo. Vi studerar i funktionens Taylorpolynom den kvadratiska formen $x^2 + 10xy + 2y^2 = [(x+5y)^2 - 23y^2]$ som tydligen är indefinit. Alltså har f_3 en sadelpunkt och ingen lokal extrempunkt i origo.

För funktionen f_4 är båda partiella derivatorna 0 i origo. Vi studerar i funktionens Taylorpolynom den kvadratiska formen $4x^2 - 3y^2$ som är indefinit. Alltså har f_4 en sadelpunkt och ingen lokal extrempunkt i origo.

Svar: Den enda av funktionerna som har en lokal extrempunkt i origo är f_2 som har en lokal maxpunkt där.

---

(5) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K x\,dxdydz$ då K är den tetraeder som begränsas av koordinatplanen och planet $2x + 3y + 6z = 6$.

Lösning: Tetraedern har sina hörn i punkterna $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ och $(0,0,1)$. Den sida av tetraedern som ligger i xy-planet är en triangel begränsad av x- och y-axlarna samt linjen $2x + 3y = 6$ dvs $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Det följer att

$$\iiint_K x\,dxdydz = \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} \int_0^{1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} x\left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) dy\,dx = \int_0^3 x\left[\left(1 - \frac{1}{3}x\right)y - \frac{y^2}{4}\right]_0^{2(1-\frac{1}{3}x)} dx$$

$$= \int_0^3 x\left(1 - \frac{1}{3}x\right)^2 dx = \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x\,dx = \cdots = \frac{3}{4}.$$

Svar: $\frac{3}{4}$

---

(6) En partikel rör sig längs den plana kurvan $y = 3x - 2$ från $(2,4)$ till $(1,1)$ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}})$. Beräkna det arbete som kraftfältet uträttar.

Lösning: På grund av symmetri ser man direkt att

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

för alla $(x,y) \neq (0,0)$. Det följer att kraftfältet är konservativt i varje enkelt sammanhängade område som inte innehåller origo, speciellt kan vår kurva inneslutas i ett sådant område. Med standarmetod, eller genom inspektion, finner man en potentialfunktion $U(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}$. Det utförda arbetet ges då av

$$A = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(1,1) - U(2,4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{20}}.$$

Svar: $1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{20}$.

Del C

(7) För ett visst svängande trumskinn, givet av $x^2 + y^2 \leq R^2$, gäller att svängningsamplituden $u(x, y)$ uppfyller Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u = 0$$

där c är en konstant. Av symmetriskäl kan man förvänta sig lösningar av formen $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, för någon funktion f av en variabel. Visa att en sådan lösning f måste uppfylla differentialekvationen

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + c^2 f(r) = 0.$$

Lösning: Vi bestämmer först $\frac{\partial u}{\partial x}$ i termer f och dess derivata.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Vi bestämmer på motsvarande sätt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =& \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
&= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
&= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} \\
&= f''(\sqrt{x^2 + y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\
&= f''(r) \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \frac{y^2}{r^3},
\end{aligned}$$

där vi har infört beteckningen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

På grund av symmetri i x och y fås också

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \frac{x^2}{r^3}.$$

Insättning i Helmholz ekvation ger

$$
\begin{aligned}
f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{y^2}{r^3} + f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2}{r^3} + c^2 f(r) = 0 &\iff \\
f''(r)\frac{x^2+y^2}{r^2} + f'(r)\frac{x^2+y^2}{r^3} + c^2 f(r) = 0 &\iff \\
f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + c^2 f(r) = 0 \qquad &\text{V.S.B}
\end{aligned}
$$

---

(8) Beräkna trippelintegralen $\iiint_B \cos z + \sin z \, dxdydz$ då B är det område som bestäms av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Lösning: Området B består av den del av klotet med medelpunkt i origo och radie 2 som ligger över, i och under första kvadranten i xy-planet. Eftersom B är symetriskt med avseende på planet $z = 0$ och $\sin z$ är en udda funktion i z följer att $\iiint_B \sin z \, dxdydz = 0$. För att beräkna $\iiint_B \cos z \, dxdydz$ beskriver vi B i sfäriska koordinater

$$
\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} , \quad S : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} .
$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
\iiint_B \cos z + \sin z \, dxdydz = \iiint_B \cos z \, dxdydz &= \iiint_S \cos(r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^2 \left(\int_0^{\pi} r^2 \cos(r\cos\theta)\sin\theta \, d\theta \right) dr
\end{aligned}
$$

Den inre θ-integralen beräknar vi med substitutionen $u = r\cos\theta$ (r hålls här konstant), $du = -r\sin\theta$, och med nya gränser $u(0) = r$ och $u(\pi) = -r$. Minustecknet i du försvinner genom omkastning av integrationsgränserna. Vi får

$$
\int_0^{\pi} r^2 \cos(r\cos\theta)\sin\theta \, d\theta = r\int_{-r}^{r} \cos u \, du = 2r\sin r
$$

vilket ger

$$
\iiint_B \cos z + \sin z \, dxdydz = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^2 r\sin r \, dr = \pi[\sin r - r\cos r]_0^2 = \pi(\sin 2 - 2\cos 2).
$$

Svar: $\pi(\sin 2 - 2\cos 2)$

---

(9) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner sådana att $f \le g$, $f(a) = g(a)$ och $f(b) = g(b)$, och låt $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion med kontinuerliga partiella derivator. Visa, utan att använda Greens formel, att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \le y \le g(x),\ a \le x \le b\}$ och γ är randen ∂D orienterad moturs.

(Påståendet i uppgift 9 är ett specialfall av Greens formel och kan användas som ett steg i ett bevis av den generella formuleringen av Greens formel.)

Lösning: Låt γ_1 vara kurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$, där vi tar x som kurvparameter löpande från a till b, och åt γ_2 vara kurvan $y = g(x)$, $a \le x \le b$, där vi återigen tar x som kurvparameter men nu löpande från b till a. Då är $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ och

$$V.L. = \int_\gamma P(x,y)\,dx = \int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + \int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x,f(x))\,dx + \int_b^a P(x,g(x))\,dx = \int_a^b P(x,f(x)) - P(x,g(x))\,dx.$$

Vi jobbar nu med högerledet, och utnyttjar att $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \le y \le g(x),\ a \le x \le b\}$

$$H.L. = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx = -\int_a^b \left(P(x,g(x)) - P(x,f(x))\right) = V.L.$$
