**SF1626 Flervariabelanalys**
**Tentamen 8 juni 2011, 08.00 - 13.00**

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | - | - | - | - |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

## Del A

(1) a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z + xy^2z^3 = 10$ i punkten $(x, y, x) = (1, -1, 2)$. (3p)

b) Punkten $(x, y, z) = (1.1, -0.9, t)$ ligger på ytan $z + xy^2z^3 = 10$. Bestäm med hjälp av det tangentplan som beräknats i a) ett approximativt värde på $t$. (1p)

(2) Beräkna volymen mellan ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och det område i $xy$-planet som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + y > 0$ och $y \geq 0$.

(3) Låt $f(x, y) = x^3y^4$. Beräkna riktningsderivatorna

- $f'_{\mathbf{u}}(1, 1)$ då $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor som är tangetvektor till kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1, 1)$;
- $f'_{\mathbf{v}}(1, 1)$ då $\mathbf{v}$ är en enhetsvektor som har positiv $x$-komponent och är ortogonal mot kurvan $x^3y^4 = 1$ i punkten $(1, 1)$.

## Del B

(4) De reellvärda funktionerna av två variabler $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar i hela $\mathbb{R}^2$ och har Taylorpolynom av grad 2 i origo enligt nedan:

$f_1$ har andra gradens Taylorpolynom $p_1(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x + y$ i origo.

$f_2$ har andra gradens Taylorpolynom $p_2(x, y) = 47 - 5x^2 + 3xy - y^2$ i origo.

$f_3$ har andra gradens Taylorpolynom $p_3(x, y) = x^2 + 10xy + 2y^2$ i origo.

$f_4$ har andra gradens Taylorpolynom $p_4(x, y) = 4x^2 - 3y^2$ i origo.

Avgör om någon eller några av funktionerna $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ har en lokal extrempunkt i origo. Avgör i så fall också om möjligt vilken typ av extrempunkt det är.

(5) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K x\,dxdydz$ då $K$ är den tetraeder som begränsas av koordinatplanen och planet $2x + 3y + 6z = 6$.

(6) En partikel rör sig längs den plana kurvan $y = 3x - 2$ från $(2, 4)$ till $(1, 1)$ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$. Beräkna det arbete som kraftfältet uträttar.

## Del C

(7) För ett visst svängande trumskinn, givet av $x^2 + y^2 \leq R^2$, gäller att svängningsamplituden $u(x, y)$ uppfyller Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u = 0$$

där $c$ är en konstant. Av symmetriskäl kan man förvänta sig lösningar av formen $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, för någon funktion $f$ av en variabel. Visa att en sådan lösning $f$ måste uppfylla differentialekvationen

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + c^2 f(r) = 0.$$

(8) Beräkna trippelintegralen $\iiint_B \cos z + \sin z \, dxdydz$ då $B$ är det område som bestäms av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

(9) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner sådana att $f \leq g$, $f(a) = g(a)$ och $f(b) = g(b)$, och låt $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion med kontinuerliga partiella derivator. Visa, utan att använda Greens formel, att

$$\int_\gamma P(x, y)\, dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$ och $\gamma$ är randen $\partial D$ orienterad moturs.

(Påståendet i uppgift 9 är ett specialfall av Greens formel och kan användas som ett steg i ett bevis av den generella formuleringen av Greens formel.)