KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2011-10-20

DEL A

(1) Betrakta funktionen $f(x,y) = e^{x-2y+1}$.
A. Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i den punkt på ytan där $x = -1$ och $y = 0$. **(2)**
B. Använd uträkningarna du har gjort i uppgift A för att bestämma ett närmevärde till $f(-11/10, 2/10)$. **(2)**

Lösning. A. Vi observerar först att i den aktuella punkten på ytan så är $z = f(-1,0) = 1$. Sedan beräknar vi partialderivatorna av f och får att $\partial f/\partial x = e^{x-2y+1}$ och $\partial f/\partial y = -2e^{x-2y+1}$. I den aktuella punkten får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = 1 \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = -2.$$

Därför blir ekvationen för tangentplanet:

$$z = 1 + 1 \cdot (x+1) - 2y,$$

vilket också kan skrivas $x - 2y - z + 2 = 0$.

B. Vi har, med hjälp av den linjära approximation vi tog fram i deluppgift A, att för (x,y) nära punkten $(-1,0)$ gäller att

$$f(x,y) \approx 1 + (x+1) - 2y.$$

Om vi väljer $x = -11/10$ och $y = 2/10$ får vi

$$f(-11/10, 2/10) \approx 1 - \frac{11}{10} + 1 - 2 \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{2}.$$

Det sökta närmevärdet är alltså $1/2$.

Svar: A. $x - 2y - z + 2 = 0$. B. $1/2$. $\square$

(2) Beräkna integralen $\iint_D x\,dxdy$, där D är den triangel som har hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,-2)$. **(4)**

Lösning. Vi kan beräkna integralen med hjälp av upprepad enkelintegration, där vi kan välja i vilken riktning vi vill integrera först. Hur vi än gör måste vi dock dela upp området i två delområden (rita figur). Om vi väljer y-integralen innerst får vi dessa delområden: delområde 1 ges av $0 \le x \le 1$ och $-x \le y \le x$ och delområde 2 ges av $1 \le x \le 2$ och $-x \le y \le -3x+4$. Vi får alltså:

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \int_0^1 \int_{-x}^{x} x\,dydx + \int_1^2 \int_{-x}^{-3x+4} x\,dydx \\ &= \int_0^1 2x^2\,dx + \int_1^2 (-2x^2+4x)\,dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{16}{3} + 8 + \frac{2}{3} - 2 \\ &= 2.\end{aligned}$$

$\square$

Svar: 2

(3) Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ och γ är den kurva som parametriseras av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.
A. Beräkna kurvintegralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2)**
B. Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av den. **(2)**

Lösning. A. Vi använder den parametrisering som är given i uppgiften. Om $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, t)$ så är $d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t, 1)\,dt$ och vi får

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/4} (t\sin t, t\cos t, \cos t\sin t)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/4} (-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \cos t\sin t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi/4} (t(\cos^2 t - \sin^2 t) + \frac{\sin 2t}{2})\,dt \\
&= \int_0^{\pi/4} (t\cos 2t + \frac{\sin 2t}{2})\,dt \\
&= \frac{\pi}{8},
\end{aligned}$$

eftersom vi med hjälp av partiell integration får att

$$\int_0^{\pi/4} t\cos 2t\,dt = \left[\frac{t\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2t}{2}\,dt.$$

B. Vi söker en potentialfunktion, dvs en funktion U sådan att $\nabla U = \mathbf{F}$. En sådan funktion måste för det första uppfylla att $\partial U/\partial x = yz$. Det ger att $U = xyz + g(y, z)$ för någon funktion g. Denna U ska sedan också uppfylla att $\partial U/\partial y = xz$ och $\partial U/\partial z = xy$ vilket gör att vi kan välja funktionen $g(y, z) = 0$. Vi får då potentialen $U(x, y, z) = xyz$. Nu beräknas kurvintegralen som potentialens värde i slutpunkten på kurvan minus potentialens värde i startpunkten på kurvan, dvs

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}) - U(1, 0, 0) = \frac{\pi}{8}.$$

□

Svar: A och B: $\frac{\pi}{8}$.

DEL B

(4) Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = xy + x$ i det område som beskrivs av olikheten $x^2 + y^2 \leq 1$. **(4)**

Lösning. Vi observerar först att området är kompakt (slutet och begränsat) och att f är ett polynom och följaktligen kontinuerlig och differentierbar på det givna området. Därför vet vi att f antar ett största och ett minsta värde, som måste antas i punkter på randen eller i inre kritiska punkter. För att hitta kritiska punkter deriverar vi partiellt och får att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 1 \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Vi ser att den enda kritiska punkten är $(x,y) = (0,-1)$ som ligger på randen. Det finns alltså inga inre kritiska punkter. Vi undersöker nu randpunkterna, dvs de punkter där $x^2 + y^2 = 1$. Vi parametriserar randen genom $x = \cos t$, $y = \sin t$, där t löper mellan 0 och 2π. Vi ska då hitta max och min av funktionen

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t + \cos t = \frac{\sin 2t}{2} + \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Vi ser att g måste anta ett största och ett minsta värde, eftersom g är kontinuerlig och intervallet slutet och begränsat, och dessa värden antas i ändpunkter eller i inre kritiska punkter (punkter där derivata saknas saknas). Vi deriverar och får $g'(t) = \cos 2t - \sin t$ och ser att $g'(t) = 0$ om och endast om $\cos 2t = \sin t$ vilket är ekvivalent med att $\cos 2t = \cos(\pi/2 - t)$ med lösningar $2t = \pm(\pi/2 - t) + k2\pi$, k heltal. I det aktuella intervallet får vi lösningarna $t = \pi/6$, $t = 5\pi/6$, $t = 3\pi/2$. Änpdpunkterna på intervallet är 0 och 2π. Vi skriver upp funktionsvärdena i alla dessa punkter för jämförelse:

$$g(0) = g(2\pi) = 1, \quad g(\pi/6) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad g(5\pi/6) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad g(3\pi/2) = 0.$$

När vi jämför dessa värden ser vi att det största värdet är $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ och det minsta värdet är $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. □

Svar:

Största värdet är $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ och det minsta värdet är $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(5) En lång rak lodrät ledare omges av en cylinderyta med ledaren som centralaxel. Cylinderytan har radie r och höjd h. Det elektrostatiska fältet kring ledaren är riktat vinkelrätt ut från ledaren och storleken är omvänt proportionell mot avståndet till ledaren med proportionalitetskonstant 1. Bestäm flödet av fältet ut genom cylinderytan. **(4)**

Lösning. Flödet Φ av fältet $\mathbf{F}$ ut genom ytan C med enhetsnormal $\mathbf{N}$ ges av

$$\Phi = \iint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS,$$

där dS är areaelementet på ytan. De i uppgiften givna förhållandena ger att

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2} \text{ och } \mathbf{N} = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

varför flödet blir (observera att $x^2 + y^2 = r^2$ på ytan!):

$$\Phi = \iint_C \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dS = \frac{1}{r} \iint_C dS = 2\pi h.$$

□

Svar: $2\pi h$.

Betrakta ytan i $\mathbb{R}^3$ med ekvation $x^2 + x - 6y + xz^3 = 2$.
A. Bestäm en ekvation för normallinjen till ytan i punkten $(x, y, z) = (2, 1, 1)$. **(3)**
B. Avgör om normallinjen från deluppgift A innehåller punkten $(-1, 4, -2)$. **(1)**
(Normallinjen är den linje som innehåller punkten $(2, 1, 1)$ och är vinkelrät mot ytan där.)

Lösning. A. Sätt $g(x, y, z) = x^2+x-6y+xz^3$. Då kan vi betrakta ytan som nivåytan $g(x, y, z) = 2$. Vi vet att gradienten $gradg$ är vinkelrät mot ytan i varje punkt på ytan och i vårt fall är vi intresserade av punkten $(2, 1, 1)$. Vi deriverar och får

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 1 + z^3 \text{ och } \frac{\partial g}{\partial y} = -6 \text{ och } \frac{\partial g}{\partial z} = 3xz^2,$$

så vi ser att $grad\, g(2, 1, 1) = (6, -6, 6)$. Vi kan därför skriva linjens ekvation $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(6, -6, 6)$, eller $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(1, -1, 1)$, där $t \in R$.

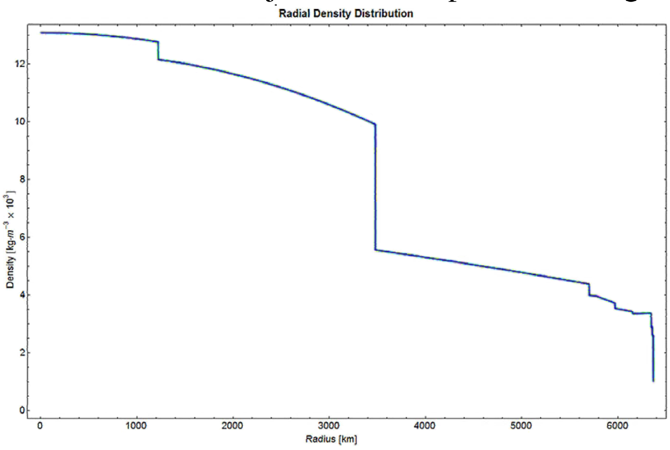
B. Punkten $(-1, 4, -2)$ ligger på linjen om och endast om $(-1, 4, -2) = (2, 1, 1)+t(1, -1, 1)$ för något värde på parametern t. Vi ser att om vi väljer $t = -3$ så uppfylls detta, dvs $(-1, 4, -2) = (2, 1, 1) + (-3)(1, -1, 1)$. Därför ligger punkten $(-1, 4, -2)$ på linjen.

$\square$

Svar: A. $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(1, -1, 1)$, där $t \in R$. B. Ja.

DEL C

(7) Enligt *Preliminary Reference Earth Model* [Dziewonski & Andersson, 1981] varierar jordens densitet med avståndet till jordens medelpunkt som i figuren [Allen McCloud]:



Jordens inre kärna sträcker sig ut till 1221 km från medelpunkten och från modellen hämtas data till följande tabell:

r	0	1200	[km]
$\rho(r)$	13088	12775	[kg/m^3]

där r är avståndet till jordens medelpunkt och $\rho(r)$ är densiteten vid detta avstånd.
A. Gör en enkel approximation av densiteten i den inre kärnan genom att anta att $\rho(r) = A - Br^2$ där och med hjälp av tabellen ovan bestämma värden på konstanterna A och B. **(1)**
B. Använd approximationen i deluppgift A för att bestämma ett ungefärligt värde på massan av jordens inre kärna. **(3)**

Lösning. A. Låt oss övergå till att mäta densiteten i kg/km^3, eftersom vi mäter radien r i km. I så fall är, enligt tabellen, $\rho(0) = 13088 \cdot 10^9$ kg/km^3 och $\rho(1200) = 12775 \cdot 10^9$ kg/km^3. Om vi nu antar att $\rho(r) = A - Br^2$ så får vi att $\rho(0) = A$ och alltså $A = 13088 \cdot 10^9$. Vidare är då $\rho(1200) = 13088 \cdot 10^9 - B \cdot 1200^2$ och alltså $B = 313 \cdot 10^9/1200^2$. Om vi väljer att använda 2 värdesiffror så har vi under de gjorda antagandena att $\rho(r) = 1.3 \cdot 10^{13} - 2.1 \cdot 10^5 \cdot r^2$.

B. En litet volymelement dV på avstånd r km från medelpunkten har massa ungefär $\rho(r)\,dV$, där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Eftersom hela massan fås genom summation av sådana element fås massan M som nedanstående integral, där K är jordens inre kärna:

$$M = \iiint_K \rho(r)\,dV = \iiint_K (1.3 \cdot 10^{13} - 2.1 \cdot 10^5 \cdot r^2)\,dxdydz.$$

I denna integral inför vi nu rymdpolära koordinater,
$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$, där $0 \le r \le 1221$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ och får

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{1221}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1.3\cdot 10^{13} - 2.1\cdot 10^5\cdot r^2)r^2\sin\theta\, d\phi d\theta dr \\ &= 4\pi\int_0^{1221}(1.3\cdot 10^{13}\cdot r^2 - 2.1\cdot 10^5\cdot r^4)\, dr \\ &= 4\pi\left(\frac{1.3\cdot 10^{13}\cdot 1221^3}{3} - \frac{2.1\cdot 10^5\cdot 1221^5}{5}\right) \\ &\approx 9.8\cdot 10^{22}\ \text{kg}. \end{aligned}$$

$\square$

Svar: A. $\rho(r) = 1.3\cdot 10^{13} - 2.1\cdot 10^5\cdot r^2$. B. c:a $9.8\cdot 10^{22}$ kg.

Låt $f(x, y)$ vara en funktion som är differentierbar och uppfyller differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

i hela $\mathbb{R}^2$. Avgör om linjen $x + 2y = 3$ är en nivåkurva till f. **(4)**

Lösning. En nivåkurva till en funktion är en kurva längs vilken funktionen är konstant. Vi kan parametrisera vår kurva, dvs linjen, genom $x = 3 - 2t$, $y = t$, där parametern t löper genom de reella talen. Vi kan nu undersöka f:s beteende längs linjen genom att studera funktionen $g(t) = f(3 - 2t, t)$. Om vi kan visa att $g'(t) = 0$ för alla världen på t så kan vi dra slutsatsen att g är konstant, vilket betyder att f är konstant längs linjen. Vi deriverar g med kedjeregeln och får

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-2) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 = 0,$$

eftersom vi vet att f uppfyller differentialekvationen i uppgiften. Linjen är alltså en nivåkurva till f.

$\square$

Svar: Ja.

Låt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara given genom $\mathbf{f}(x, y) = (18x^4 + 12x^2y + 2y^2 - x, 3x^2 + y)$.
Denna $\mathbf{f}$ är en inverterbar funktion på $\mathbb{R}^2$.
A. Bestäm funktionalmatrisen till $\mathbf{f}$ i punkten $(1, -1)$. **(1)**
B. Använd linjär approximation för att bestämma en approximativ lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 18x^4 + 12x^2y + 2y^2 - x = 7.05 \\ 3x^2 + y = 2.01 \end{cases}$$ **(3)**

Lösning. Funktionalmatrisen till $\mathbf{f}$ är på formen

$$J_{\mathbf{f}}(1, -1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar de partiella derivatorna till $\mathbf{f}$:s komponentfunktioner i punkten $(-1, 1)$ och får att funktionalmatrisen till $\mathbf{f}$ i den aktuella punkten är:

$$J_{\mathbf{f}}(1, -1) = \begin{pmatrix} 47 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Med hjälp av linjär approximation har vi, för små tillskott h och k, att

$$\mathbf{f}(1 + h, -1 + k) \approx \mathbf{f}(1, -1) + J_{\mathbf{f}}(1, -1)(h\ k)^T$$

vilket i vårt fall betyder att det givna ekvationssystemet kan approximeras med det linjära systemet

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 47 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.05 \\ 2.01 \end{pmatrix}.$$

Vi observerar att inversen till $J_{\mathbf{f}}(1, -1)$ är matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 6 & -47 \end{pmatrix}$. Med hjälp av den kan vi nu lösa det linjära systemet och få

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 6 & -47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.17 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att den approximativa lösningen till ekvationssystemet i uppgiften är $x = 1.03,\ y = -1.17$ (vilket faktiskt överensstämmer med den riktiga lösningen till två decimaler).

$\square$

Svar: $x = 1.03,\ y = -1.17$.