KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 20 oktober, 2011

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Betrakta funktionen $f(x,y) = e^{x-2y+1}$.
A. Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i den punkt på ytan där $x = -1$ och $y = 0$. **(2)**
B. Använd uträkningarna du har gjort i uppgift A för att bestämma ett närmevärde till $f(-11/10, 2/10)$. **(2)**

(2) Beräkna integralen $\iint_D x\,dxdy$, där D är den triangel som har hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,-2)$. **(4)**

(3) Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ och γ är den kurva som parametriseras av $(x,y,z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.
A. Beräkna kurvintegralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2)**
B. Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av den. **(2)**

DEL B

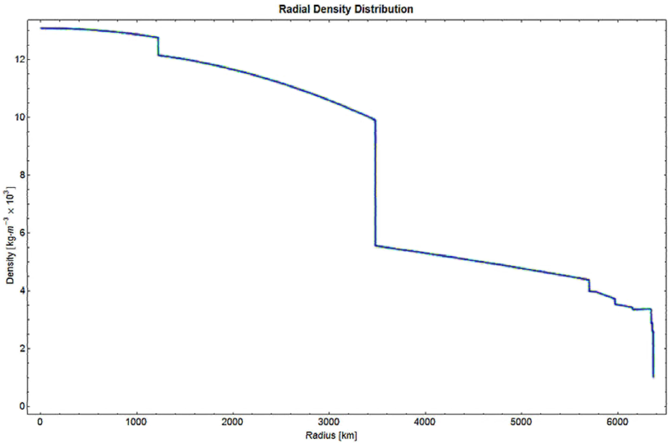
(4) Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = xy + x$ i det område som beskrivs av olikheten $x^2 + y^2 \leq 1$. **(4)**

(5) En lång rak lodrät ledare omges av en cylinderyta med ledaren som centralaxel. Cylinderytan har radie r och höjd h. Det elektrostatiska fältet kring ledaren är riktat vinkelrätt ut från ledaren och storleken är omvänt proportionell mot avståndet till ledaren med proportionalitetskonstant 1. Bestäm flödet av fältet ut genom cylinderytan. **(4)**

(6) Betrakta ytan i $\mathbb{R}^3$ med ekvation $x^2 + x - 6y + xz^3 = 2$.
A. Bestäm en ekvation för normallinjen till ytan i punkten $(x,y,z) = (2,1,1)$. **(3)**
B. Avgör om normallinjen från deluppgift A innehåller punkten $(-1,4,-2)$. **(1)**
(Normallinjen är den linje som innehåller punkten $(2,1,1)$ och är vinkelrät mot ytan där.)

DEL C

(7) Enligt *Preliminary Reference Earth Model* [Dziewonski & Andersson, 1981] varierar jordens densitet med avståndet till jordens medelpunkt som i figuren [Allen McCloud]:



Jordens inre kärna sträcker sig ut till 1221 km från medelpunkten och från modellen hämtas data till följande tabell:

r	0	1200	[km]
$\rho(r)$	13088	12775	[kg/m^3]

där r är avståndet till jordens medelpunkt och $\rho(r)$ är densiteten vid detta avstånd.
A. Gör en enkel approximation av densiteten i den inre kärnan genom att anta att $\rho(r) = A - Br^2$ där och med hjälp av tabellen ovan bestämma värden på konstanterna A och B. **(1)**
B. Använd approximationen i deluppgift A för att bestämma ett ungefärligt värde på massan av jordens inre kärna. **(3)**

(8) Låt $f(x, y)$ vara en funktion som är differentierbar och uppfyller differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

i hela $\mathbb{R}^2$. Avgör om linjen $x + 2y = 3$ är en nivåkurva till f. **(4)**

(9) Låt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara given genom $\mathbf{f}(x, y) = (18x^4 + 12x^2y + 2y^2 - x, 3x^2 + y)$. Denna $\mathbf{f}$ är en inverterbar funktion på $\mathbb{R}^2$.
A. Bestäm funktionalmatrisen till $\mathbf{f}$ i punkten $(1, -1)$. **(1)**
B. Använd linjär approximation för att bestämma en approximativ lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 18x^4 + 12x^2y + 2y^2 - x = 7.05 \\ 3x^2 + y = 2.01 \end{cases}$$

(3)