KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 4 juni 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1 eller period 3 innevarande läsår. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Låt $g(x,y,z) = e^{2-xyz^2}$.
A. Ange en vektor som är ortogonal mot nivåytan $g(x,y,z) = 1$ i punkten $(2,1,-1)$. **(2)**
B. Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $g(x,y,z) = 1$ i punkten $(2,1,-1)$. **(2)**

(2) Låt D vara det område i planet som beskrivs av olikheterna $-x \leq y \leq x$ och $x^2+y^2 \leq 1$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D y\,dxdy.$$

(4)

(3) Ett vektorfält $\mathbf{F} = (P,Q)$ ges i området $x > 0,\ y > 0$ i planet av formlerna

$$P(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \text{ och } Q(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

A. Bestäm konstanten a så att vektorfältet blir konservativt. **(2)**
B. Med konstanten a vald som i uppgift A, beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

då γ är det räta linjestycket från punkten $(1,1)$ till punkten $(5,4)$. **(2)**

DEL B

(4) Betrakta problemet att optimera funktionen $f(x, y) = (1+3x+2y)^2$ för (x, y) som ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.
A. Hur kan man på förhand veta att problemet har en lösning, dvs att f verkligen har ett största och ett minsta värde för aktuella (x, y)? **(1)**
B. Lös problemet, dvs hitta största och minsta värdet av f på enhetscirkeln! **(3)**

(5) Beräkna volymen av kroppen K som ges av

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \text{ och } 1 \leq z \leq x + y + 11\}.$$

(4)

(6) Avgör om det går att byta integrationsordning i den itererade integralen

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\, dx \right) dy.$$

Beräkna integralen! **(4)**

DEL C

(7) Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2y + y^3$ med definitionsmängd D given av olikheten $2x^2 + y^2 \leq 3$. En punkt (x_0, y_0) på randen till området D kallas för en *stationär randpunkt* till f om riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = 0$ för alla riktningar $\mathbf{v}$ som är parallella med randkurvan i (x_0, y_0).
A. Avgör om punkten $(1, 1)$ är en stationär randpunkt till f. **(2)**
B. Bestäm alla stationära randpunkter till f. **(2)**

(8) En plan strömning parallell med x-axeln i ett standardkoordinatsystem har hastighetsfältet $\mathbf{u}(x,y) = (v_0, 0)$, där v_0 är en konstant. Ett cirkulärt hinder, med medelpunkt i origo och radien R, placeras i strömningen. Detta förändrar hastighetsfältet. När jämvikt inställt sig är strömningen stationär (tidsoberoende) och under vissa antaganden kan man visa att det nya hastighetsfältet $\mathbf{v}$ har potentialen

$$\Phi(x,y) = v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right),$$

dvs $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$.
A. Bestäm hastighetsfältet $\mathbf{v}(x,y)$ då $x^2 + y^2 > R^2$. **(1)**
B. Bestäm hastigheten i de fyra punkterna $(\pm 2R, \pm 2R)$. **(1)**
C. Visa att strömlinjerna (kurvor som i varje punkt (x,y) har $\mathbf{v}(x,y)$ som tangent) skär y-axeln under rät vinkel. **(1)**
D. Beräkna $\lim_{x\to\pm\infty} \mathbf{v}(x,y)$ och skissa med ledning av detta gränsvärde och uppgift B och C ett par strömlinjer. **(1)**

(9) Ett klot med radie r har sin medelpunkt på ytan av ett klot med radie R, där $R > r$. Beräkna volymen av den del av det mindre klotet som befinner sig inuti det större klotet. **(4)**