



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Fredagen den 19 oktober, 2012**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. En kulle beskrivs approximativt av funktionen

$$h(x, y) = \frac{5}{1 + 3x^2 + y^2}$$

i lämpliga enheter där $h(x, y)$ är höjden. Om du befinner dig i punkten $(1, 1, 1)$ på kullen, i vilken riktning, i xy -planet, skall du gå för att gå brantast nedåt? **(4 p)**

2. Bestäm integralen av $f(x, y) = x^2y$ över triangeln med hörn i $(0, 2)$, $(4, 0)$ och $(-4, 0)$. **(4 p)**

3. Ett vektorfält $F = (P, Q)$ i området $x, y > 0$ i planet ges av formlerna

$$P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

För vilka värden på parametern a är vektorfältet konservativt? Bestäm en potential till vektorfältet för sådana a . **(4 p)**

DEL B

4. Beräkna arbetet som en partikel utför då den genomlöper kurvan Γ given av $4x^2 + y^2 = 4$ ett varv moturs i kraftfältet $F = (y + 3x, 2y - x)$. **(4 p)**

5. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = yx^2 + 5y^3$$

på området $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 5y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. **(4 p)**

6. Bestäm flödet av vektorfältet $F = (xz, yz, z(1 - z))$ genom ytan S där S är cylinderytan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Masstätheten för en gas ges av

$$\rho(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

där c är en fysikalisk konstant. Gasen befinner sig i rummet utanför ett klot som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, dvs. i mängden $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$. Beräkna gasens totala massa uttryckt i c . **(4 p)**

8. Betrakta ekvationen

$$x + y + z = \sin xyz \quad (*)$$

a) Visa att genom ekvationen (*) defineras en funktion f i en omgivning av $(x, y) = (0, 0)$, så att (*) är ekvivalent med $z = f(x, y)$ i en omgivning $(0, 0, 0)$. **(2 p)**

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i origo. **(2 p)**

9. Ett elektriskt laddat skal S utgörs av den del av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ som begränsas av planen $z = 1/\sqrt{2}$ och $z = -1/\sqrt{2}$. Laddningstätheten ges av

$$q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Beräkna skalets totala laddning

$$Q = \iint_S q(x, y, z) dS. \quad \mathbf{(4 p)}$$