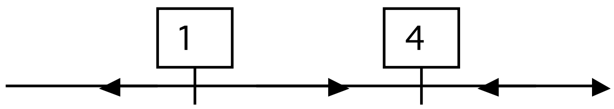
KTH Matematik

Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200 och 5B1220.
Lördagen den 30 oktober 2004, kl 0900-1400.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 block(uppgifter).
För godkänt krävs att alla 6 block är godkända.
OBS!
GODKÄNDA BLOCK TILLGODORÄKNAS FRÅN SOMMARENS REPETITIONSKURS SAMT TILLHÖRANDE OMTENTAMEN HÖSTEN 2004.
OBS!
Detta sker enligt följande: Godkänt block nr i ger uppgift nr i godkänd, i=1, 2,...6.

Del1.
Block1.
I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b.
Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t)$.
Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.
Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(t)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.
Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.
Studera långtidsbeteendet för olika startvärden på populationen.
Lösning:
Sätt in de givna konstanterna i differentialekvationen.
Då erhålles $\frac{dP}{dt} = (5 - P)P - 4 = -P^2 + 5P - 4 = (P - 1)(4 - P)$.
Vi bestämmer först kritiska punkter och studerar därefter derivatans tecken.
I de kritiska punkterna är derivatan lika med noll.
Vi erhåller två kritiska punkter $P = 1,\ P = 4$.
Nu över till studie av derivatans tecken.



Vi får följande population efter lång tid med startpopulationen P_0 : $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4\ ,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1\ ,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0\ ,\ t \to \infty \end{cases}$.

SVAR: $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4\ ,\ t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1\ ,\ t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0\ ,\ t \to \infty \end{cases}$.

Block2.
Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 9y = \frac{36}{\sin 3x}\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{3}\ .$$

Lösning:
Den allmänna lösningen består av allmänna homogena lösningen plus en partikulär lösning.
Den allmänna homogena lösningen är $y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$.
För att erhålla en partikulärlösning användes metoden variation av parametrar.
Vi ansätter $y = u(x)\cos 3x + v(x)\sin 3x$.

Variation av parametrar ger oss följande system:

$$\begin{pmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{36}{\sin 3x}\end{pmatrix}$$

Lös ut u' och v'.

$$u'=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin 3x\\ \dfrac{36}{\sin 3x} & 3\cos 3x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}}=\frac{-36}{3}=-12\ ,\quad v'=\frac{\begin{vmatrix}\cos 3x & 0\\ -3\sin 3x & \dfrac{36}{\sin 3x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 3x & \sin 3x\\ -3\sin 3x & 3\cos 3x\end{vmatrix}}=\frac{36\cos 3x}{3\sin 3x}=4\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}\ .$$

Integration ger $u=-12x$ och $v=4\ln|\sin 3x|$.

Partikulärlösningen blir $y_p=-12x\cos 3x+4\ln|\sin 3x|\sin 3x$.

Den allmänna lösningen är $y=A\cos 3x+B\sin 3x-12x\cos 3x+4\ln|\sin 3x|\sin 3x$.

SVAR: $y=A\cos 3x+B\sin 3x-12x\cos 3x+4\ln|\sin 3x|\sin 3x$.

Block3.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+2y'+5y=5U(t-3)$

som uppfyller villkoren $y(0)=1$ och $y'(0)=3$. Här är $U(t-3)$ Heavisides stegfunktion.

Lösning:

Laplacetransformera:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2(sY(s)-y(0))+5Y(s)=\frac{5}{s}e^{-3s}$$

$$(s^2+2s+5)Y(s)=s+3+2+\frac{5}{s}e^{-3s}$$

$$Y(s)=\frac{s+5}{s^2+2s+5}+\frac{5}{s(s^2+2s+5)}e^{-3s}=\frac{s+1+4}{(s+1)^2+4}+\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)e^{-3s}$$

Återtransformera:

$$y(t)=e^{-t}\{\cos 2t+2\sin 2t\}+U(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}(\cos 2(t-3)+\frac{1}{2}\sin 2(t-3))\right]$$

SVAR:

$$y(t)=e^{-t}\{\cos 2t+2\sin 2t\}+U(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}(\cos 2(t-3)+\frac{1}{2}\sin 2(t-3))\right]$$

Block4.

Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Vad händer med en partikel som placeras i punkten (3,4) efter lång tid?

Lösning:

Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -5\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+5=(\lambda+1)^2+4$.

Egenvärdena är $\lambda=-1\pm 2i$.

Vi bestämmer nu en egenvektor till egenvärdet $\lambda=-1+2i$.

Insättning av $\lambda=-1+2i$ i systemet $\begin{pmatrix}-2-\lambda & -5\\ 1 & 0-\lambda\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix}-1-2i & -5\\ 1 & 1-2i\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

En komplex lösning är $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix}$

En komplex lösning till systemet av differentialekvationer ges av

$$\mathbf{Z} = e^{(-1+2i)t}\begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos 2t + i\sin 2t)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Real- och imaginärdel ger oss två linjärt oberoende reella lösningar till systemet.

$$\operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

Linjärkombinationer av dessa två lösningar ger den allmänna lösningen.

$$\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}.$$

En partikel placerad i punkten (3,4) kommer efter lång tid att hamna i origo,
ty komplexa egenvärden med negativ realdel ger en inåtgående spiral.

SVAR: $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t - 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$. Partikeln hamnar i origo.

Block5.

Bestäm villkor på den reella konstanten α så att (0,0) är en centrumpunkt för det linjära systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Lösning:

Vi bestämmer först matrisens egenvärden.

Ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1 \\ -1 & -\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2 + 1$ ger oss $\lambda = \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}$.

För att erhålla en centrumpunkt krävs att egenvärdena är rent imaginära.

Det ger att $\alpha^2 - 1 < 0$, $-1 < \alpha < 1$.

SVAR: Konstanten α skall uppfylla villkoret $-1 < \alpha < 1$.

Block6.

Lös den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t > 0$

och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$, $0 < x < \pi$.

Lösning:

Variabelseparation ger oss produktlösningar men vi utnyttjar BETA.

Den lösning till differentialekvationen och randvillkoren ges enligt BETA 10.9.Ex2 av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin nx$$

Begynnelsevillkoret ger $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = u(x,0) = 2\sin 3x + 7\sin 4x + \sin 7x$.

En direkt identifiering ger $c_3 = 2$, $c_4 = 7$, $c_7 = 1$ och övriga $c_n = 0$.

Vi får $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.

SVAR: $u(x,t) = 2e^{-9t}\sin 3x + 7e^{-16t}\sin 4x + e^{-49t}\sin 7x$.