Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).

Onsdagen den 12 januari 2005, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.

Uppgifterna: 1 och 3 ger 4p; 2, 4-6 ger 3p; 7-9 ger 5p.

Inga bonuspoäng räknas.

1. För en duvart gäller, att den dör ut om inte antalet individer N inom ett visst område överskrider ett tröskelvärde $T > 0$.
Å andra sidan finns en nivå $K > T$ sådan att tillgången på föda bara räcker till K individer.
Om den spontana tillväxtkoefficienten är $r > 0$, så modelleras ovanstående med följande differentialekvation för $N = N(t)$ som funktion av tiden t : $\frac{dN}{dt} = -r\left(\frac{N}{T}-1\right)\left(\frac{N}{K}-1\right)N$.

Studera denna icke-linjära differentialekvation enligt följande:

a. Bestäm alla stationära lösningar.

b. Avgör för varje stationär lösning om den är stabil eller instabil.

c. Kommentera även rimligheten i det erhållna resultatet.

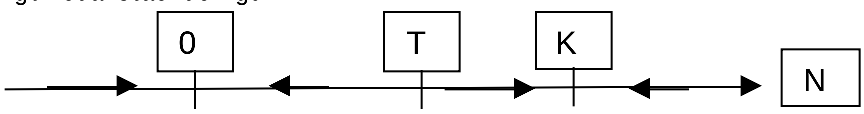
Lösning:

a. De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.

Vi erhålles då följande ekvation: $\frac{dN}{dt} = -r\left(\frac{N}{T}-1\right)\left(\frac{N}{K}-1\right)N = 0$.

De stationära lösningarna är $N = T$, $N = K$ och $N = 0$.

b. Teckenstudie av derivatan ger information om funktionens växande och avtagande enligt nedanstående figur.



Lösningarna $N = 0$ och $N = K$ är stabila medan $N = T$ är instabil.

c. Resultatet är rimligt eftersom antalet individer går mot noll efter lång tid, dvs duvarten dör ut om antalet är mindre är tröskelvärde $T > 0$. Vidare går antalet individer efter lång tid mot K individer till vilka födan räcker.

SVAR: a. De stationära lösningarna är $N = T$, $N = K$ och $N = 0$.

b. Lösningarna $N = 0$ och $N = K$ är stabila medan $N = T$ är instabil.

c. Se ovan.

Anmärkning:

Undersökningen av lösningarnas stabilitet respektive instabilitet kan även göras genom att undersöka tecknet hos derivatan av funktonen $g(N) = -r\left(\frac{N}{T}-1\right)\left(\frac{N}{K}-1\right)N$ för den stationära lösningen $N_{st.}$.

Då gäller $g'(N_{st.}) < 0$ ger stabil lösning och $g'(N_{st.}) > 0$ ger instabil lösning.

2. Bestäm Fourierserien till funktionen som är π-periodisk och definieras av $f(t) = \sin^4 t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Lösning:

Den givna funktionen är en jämn funktion med perioden π och dess Fourierserie har formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt$.

Vi utvecklar vår funktion enligt följande

$$f(t) = \sin^4 t = (\sin^2 t)^2 = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2t + \cos^2 2t}{4} = \frac{1-2\cos 2t}{4} + \frac{1+\cos 4t}{4\ 2}$$

Förenklat ger detta $f(t)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{\cos 2t}{2}+\dfrac{\cos 4t}{8}$.

Vi har erhållit den sökta Fourierserien.

Vi tilldelar funktionen f Fourierserien $\dfrac{3}{8}-\dfrac{\cos 2t}{2}+\dfrac{\cos 4t}{8}$, dvs $f(t)\sim \dfrac{3}{8}-\dfrac{\cos 2t}{2}+\dfrac{\cos 4t}{8}$.

SVAR Den sökta Fourierserien är $\dfrac{3}{8}-\dfrac{\cos 2t}{2}+\dfrac{\cos 4t}{8}$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\dfrac{d}{dx}(xy)=y^2\sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1)=1$.

Ange därefter lösningens existensintervall.

Lösning:

Vi utvecklar vänstra ledet och får: $xy'+y=y^2\sqrt{x}$.

Detta är en differentialekvation av Bernoulli typ.

Den triviala lösningen, $y\equiv 0$, är ej av intresse i detta fall.

Omforma differentialekvationen genom att multiplicera med y^{-2}.

Då erhålles: $xy^{-2}y'+y^{-1}=\sqrt{x}$.

Sätt: $z=y^{-1}$, $z'=-y^{-2}y'$.

Insättning i differentialekvationen ger $-xz'+z=\sqrt{x}$, $xz'-z=-\sqrt{x}$.

Vi har fått en linjär differentialekvation och denna löses med hjälp av en integrerande faktor.

Först skriver vi om differentialekvationen på standardform: $z'-\dfrac{1}{x}z=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Multiplicera med en integrerande faktor, $e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\dfrac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}z'-\frac{1}{x^2}z=-\frac{1}{x\sqrt{x}}\ ,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}z\right)=-x^{-\frac{3}{2}}$$

Integrera med avseende på x: $\dfrac{z}{x}=2x^{-\frac{1}{2}}+C$, $z=2\sqrt{x}+Cx$.

Men $z=y^{-1}$ ger: $y^{-1}=2\sqrt{x}+Cx$.

Det givna villkoret ger: $1=2+C$, $C=-1$.

Den sökta lösningen är $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}-x}$.

Lösningens existensintervall skall uppfylla följande villkor :

$x>0$ och $2\sqrt{x}-x=\sqrt{x}(2-\sqrt{x})\neq 0$ samt innehålla $x=1$.

Detta ger oss intervallet $\{x:0<x<4\}$.

SVAR: Differentialekvationens lösning är $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}-x}$ och dess existensintervall är $\{x:0<x<4\}$.

4. Lös ekvationen

$$y'(t)=\cos t+\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau \quad \text{, då } y(0)=1 .$$

Lösning:

Vi Laplacetransformerar integrodifferentialekvationen.

$$sY(s)-y(0)=\frac{s}{s^2+1}+Y(s)\frac{s}{s^2+1}$$

Lös ut $Y(s)$ samt sätt in begynnelsevillkoret.

$$Y(s)\frac{s^3}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}+1\quad ,\ Y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}\ .$$

Återtransformera:

$$y(t)=t+1+\frac{t^2}{2}.$$

SVAR: Integrodifferentialekvationens lösning är $y(t)=t+1+\frac{t^2}{2}$.

5. Betrakta differentialekvationen $x^2y''-4xy'+6y=x^4e^x \;,\; x>0$.
Motsvarande homogena differentialekvation har lösningar på formen $y=x^n$, där n är heltal.
Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen.
Lösning:
Den allmänna lösningen erhålles som den allmänna homogena lösningen plus en partikulär lösning.
Vi sätter in $y=x^n$ i den homogena differentialekvationen $x^2y''-4xy'+6y=0$ och erhåller då följande ekvation $x^2n(n-1)x^{n-2}-4xnx^{n-1}+6x^n=0$ vilken omformas till $(n(n-1)-4n+6)x^n=0$.
Detta skall gälla för alla $x>0$ vilket leder till ekvationen $n(n-1)-4n+6=0$, $n^2-5n+6=0$.
Rötterna är $n=2$ och $n=3$.
Den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen är $y_h=c_1x^2+c_2x^3$.
Den inhomogena differentialekvationen skrives först på standardform: $y''-4x^{-1}y'+6x^{-2}y=x^2e^x \;,\; x>0$
Vi bestämmer en partikulärlösning med hjälp av metoden "variation av parametrar" och gör därvid ansatsen $y_p=u(x)x^2+v(x)x^3$.

Då erhålles följande system: $\begin{pmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x^2e^x \end{pmatrix}$.

Lös systemet. Cramers regel ger oss följande lösning: $\begin{cases} u'=\dfrac{-x^5e^x}{x^4}=-xe^x \\ v'=\dfrac{x^4e^x}{x^4}=e^x \end{cases}$.

Integrera med avseende på x: $\begin{cases} u=-(xe^x-e^x) \\ v=e^x \end{cases}$.

En partikulärlösningen blir $y_p=-(xe^x-e^x)x^2+e^xx^3=e^xx^2$.
Den allmänna lösningen ges av $y=y_h+y_p=c_1x^2+c_2x^3+e^xx^2$.
SVAR: Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen ges av
$y=y_h+y_p=c_1x^2+c_2x^3+e^xx^2$.

6. Differentialekvationen $x''+a\left((x')^3-x'\right)+x=0$, där a är en reell parameter, kan omformas till ett system genom att sätta $y=x'$. Då blir $y'=-a\left(y^3-y\right)-x$. Det uppkomna systemet har endast en kritisk punkt. Bestäm denna och avgör för vilka värden på parametern a som den kritiska punkten är en spiral samt när denna är stabil respektive instabil.
Lösning:

Det uppkomna systemet är $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ -x-a(y^3-y) \end{pmatrix}$.

I kritiska punkter är $\mathbf{X}'=\mathbf{0}$. Detta ger oss lösningen $\mathbf{X}=\mathbf{0}$, dvs origo är den enda stationära punkten.
Vi betraktar det linjariserade systemet, vilket erhålles genom att först beräkna Jacobimatrisen i den aktuella stationära punkten, origo.

Jacobimatrisen blir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a(3y^2-1) \end{pmatrix}$. Insättning av origo ger matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

Vårt linjariserade system är $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Vi bestämmer matrisens egenvärden.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4}$.

Egenvärdena är $\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-1 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. För att den stationära punkten skall vara en spiralpunkt krävs att egenvärden är komplexa med en realdel skild ifrån noll.

Komplexa egenvärden erhålles då $a^2 - 4 < 0$, dvs då $-2 < a < 2$.

För stabilitet krävs att realdelen av det komplexa egenvärdet är negativt och för instabilitet krävs att realdelen av det komplexa egenvärdet är positivt.

Stabil spiralpunkt fås då $-2 < a < 0$ och instabil spiralpunkt fås då $0 < a < 2$.

Detta gäller för såväl det linjariserade systemet som får det icke-linjära systemet.

För parametervärdet $a = 0$ är origo en centrumpunkt i det linjariserade systemet.

Dock kan ingen slutsats dras för det icke-linjära systemet med utgångspunkt från detta.

Däremot övergår det icke-linjära systemet, med $a = 0$, till följande linjära system $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Detta har rent imaginära egenvärden och således erhålles en centrumpunkt.

SVAR: Den kritiska punkten är origo, (0,0).

Stabil spiralpunkt fås då $-2 < a < 0$ och instabil spiralpunkt fås då $0 < a < 2$.

7. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.

Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ {}^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.

Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Detta ger upphov till följande problem:
$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u'_x(\frac{\pi}{2},t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

Lösning:

Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.

Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.

Dessa är följande: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \in R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R}$
$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$	$X''(x) = 0$	$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$
$X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$	$X(x) = A_2 x + B_2$	$X(x) = A_3 \cos\mu x + B_3 \sin\mu x$

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor: $X(0)T(t) = 0,\ X'(\frac{\pi}{2})T(t) = 0,\ t > 0$.

Dessa skall gälla för alla $t > 0$.

Detta ger: $X(0) = 0,\ X'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X'(x)$.

$\underline{\lambda = \mu^2,\ \mu \in R}$	$\underline{\lambda = 0}$	$\underline{\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R}$

$$X(x)=A_1e^{\mu x}+B_1e^{-\mu x} \qquad X(x)=A_2x+B_2 \qquad X(x)=A_3\cos\mu x+B_3\sin\mu x$$
$$X'(x)=\mu(A_1e^{\mu x}-B_1e^{-\mu x}) \qquad X'(x)=A_2 \qquad X'(x)=\mu(-A_3\sin\mu x+B_3\cos\mu x)$$

Insättning av villkoren ger.

$\underline{\lambda=\mu^2,\ \mu \quad R}$

$X(0)=A_1+B_1=0$

$X'(\frac{\pi}{2})=\mu(A_1e^{\mu\frac{\pi}{2}}-B_1e^{-\mu\frac{\pi}{2}})=0$

$\begin{cases} B_1=-A_1 \\ \mu A_1(e^{\mu\frac{\pi}{2}}+e^{-\mu\frac{\pi}{2}})=0 \end{cases}$

$\underline{\lambda=0}$

$X(0)=B_2=0$

$X'(\frac{\pi}{2})=A_2=0$

$\begin{cases} B_2=0 \\ A_2=0 \end{cases}$

$\underline{\lambda=-\mu^2,\ \mu \quad R}$

$X(0)=A_3=0$

$X'(\frac{\pi}{2})=\mu(-A_3\sin\mu\frac{\pi}{2}+B_3\cos\mu\frac{\pi}{2})=0$

$\begin{cases} A_3=0 \\ \mu B_3\cos\mu\frac{\pi}{2}=0 \end{cases}$

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\lambda=-\mu^2,\ \mu \quad R$.

Då erhålles $\mu=2n+1$, $n \quad N$ och lösningen har formen $X(x)=B_3\sin(2n+1)x$.

Motsvarande t-ekvation har lösningen $T(t)=C_3e^{\lambda t}=C_3e^{-(2n+1)\ t}$.

Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen $u_n(x,t)=X(x)T(t)=B_3C_3\sin(2n+1)x\ \ e^{-(2n+1)\ t}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.

Vi erhåller $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_ne^{-(2n+1)\ t}\sin(2n+1)x$.

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x,0)=2\sin 3x+5\sin 7x$.

Insättning ger: $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin(2n+1)x \ =2\sin 3x+5\sin 7x$.

Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.

Vi får $b_1=2$ och $b_3=5$. Den sökta lösningen är $u(x,t)=2e^{-9t}\sin 3x+5e^{-49t}\sin 7x$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t)=2e^{-9t}\sin 3x+5e^{-49t}\sin 7x$.

8.a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell matris.

Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.

En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z}=\mathbf{X}_1+i\ \mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är reell- och vektorvärda funktioner.

Visa att även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ uppfyller systemet.

b) Låt den reella matrisen $\mathbf{A}$ ha egenvärdet $\lambda=\alpha+i\beta$ och

tillhörande egenvektor är $\mathbf{v}=\mathbf{v_1}+i\mathbf{v_2}$, där $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v}_2$ är reella vektorer.

Visa utgående från detta hur två reella linjärt oberoende lösningar till systemet kan erhållas.

c) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Lösning:

a) Vi vet att $\mathbf{Z}=\mathbf{X}_1+i\ \mathbf{X}_2$ satisfierar systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.

Insättning ger $(\mathbf{X}_1+i\ \mathbf{X}_2)'=\mathbf{A}(\mathbf{X}_1+i\ \mathbf{X}_2)$.

Utnyttjandet av linjariteten hos deriveringen och matrismultiplikationen ger: $\mathbf{X}_1'+i\ \mathbf{X}_2'=\mathbf{AX}_1+i\ \mathbf{AX}_2$.

Realdelen respektive imaginärdelen är: $\begin{cases}\mathrm{Re}:\ \mathbf{X}_1'=\mathbf{AX}_1\\ \mathrm{Im}:\ \mathbf{X}_2'=\mathbf{AX}_2\end{cases}$.

b) En komplex lösning ges av

$$\mathbf{Z}=\mathbf{e}^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{v_1}+i\mathbf{v_2})=\mathbf{e}^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(\mathbf{v_1}+i\mathbf{v_2})=\mathbf{e}^{\alpha t}\{\mathbf{v_1}\cos\beta t-\mathbf{v_2}\sin\beta t\}+i\mathbf{e}^{\alpha t}\{\mathbf{v_1}\sin\beta t+\mathbf{v_2}\cos\beta t\}$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar.

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\mathbf{Z}=\ \mathbf{X}_1=\mathbf{e}^{\alpha t}\{\mathbf{v_1}\cos\beta t-\mathbf{v_2}\sin\beta t\}\\ \mathrm{Im}\mathbf{Z}=\ \mathbf{X}_2=\mathbf{e}^{\alpha t}\{\mathbf{v_1}\sin\beta t+\mathbf{v_2}\cos\beta t\}\end{cases}$$

c) Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -4\\ 5 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+17=(\lambda+1)^2+16$.

Egenvärdena är $\lambda=-1\pm 4i$.
Vi bestämmer en egenvektor till egenvärdet $\lambda=-1+4i$.

Denna fås ur ekvationen $\mathbf{0}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -4\\ 5 & -3-\lambda\end{pmatrix}\mathbf{v}$ med $\lambda=-1+4i$ insatt.

Vi får $\begin{pmatrix}2-4i & -4\\ 5 & -2-4i\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}$. En lösning är $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z}=\mathbf{e}^{(-1+4i)t}\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}=\mathbf{e}^{-t}(\cos 4t+i\sin 4t)(\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix})$

$$\mathbf{Z}=\mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\cos 4t-\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\sin 4t\right\}+i\mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\sin 4t+\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\cos 4t\right\}.$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar.

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\mathbf{Z}=\ \mathbf{X}_1=\mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\cos 4t-\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\sin 4t\right\}=\mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}2\cos 4t\\ \cos 4t+2\sin 4t\end{pmatrix}\\ \operatorname{Im}\mathbf{Z}=\ \mathbf{X}_2=\mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\sin 4t+\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\cos 4t\right\}=\mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}2\sin 4t\\ \sin 4t-2\cos 4t\end{pmatrix}\end{cases}$$

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna.

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\cos 4t\\ \cos 4t+2\sin 4t\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}2\sin 4t\\ \sin 4t-2\cos 4t\end{pmatrix}$$

eller med hjälp av en fundamentalmatris

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2e^{-t}\cos 4t & 2e^{-t}\sin 4t\\ e^{-t}(\cos 4t+2\sin 4t) & e^{-t}(\sin 4t-2\cos 4t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

SVAR: a) Se ovan . b) Två linjärt oberoende lösningar är $\begin{cases}\mathbf{X}_1=\mathbf{e}^{\alpha t}\{\mathbf{v_1}\cos\beta t-\mathbf{v_2}\sin\beta t\}\\ \mathbf{X_2}=\mathbf{e}^{\alpha t}\{\mathbf{v_1}\sin\beta t+\mathbf{v_2}\cos\beta t\}\end{cases}$.

c) Den allmänna lösningen är $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\cos 4t\\ \cos 4t+2\sin 4t\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}2\sin 4t\\ \sin 4t-2\cos 4t\end{pmatrix}$.

9. En infektionssjukdom antas sprida sig i en sälstam med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet infekterade och antalet icke-infekterade individer.
Låt andelen infekterade individer vara lika med $x(t)$.
Vid ett visst tillfälle var halva populationen infekterad och spridningshastigheten var då så stor att, om den förbleve konstant, så skulle hela populationen vara infekterad efter 1 månad.
Hur stor del av populationen är i själva verket infekterad efter en månad ?
Lösning:
Vi ställer upp den matematiska modellen och erhåller därvid
$\dfrac{dx(t)}{dt}=kx(t)(1-x(t))$, där k är en konstant.
Vi kallar den tidpunkt t vid vilken halva populationen är infekterad för $t=0$ och väljer månad som tidsenhet.

Då är andelen infekterade lika med $x(0)=\frac{1}{2}$ och tillväxthastigheten $\frac{dx}{dt}(0)=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$.

Insättning i differentialekvationen ger: $\frac{1}{2}=k\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})$, vilket ger $k=2$.

Nu går vi över till den uppställda differentialekvationen med insatt värde på k .

$\frac{dx}{dt}=2x(1-x)$ är separabel. Dess konstantlösningar saknar i detta fall intresse.

Omformning av differentialekvationen ger $\frac{1}{x(1-x)}\frac{dx}{dt}=2$.

Partialbråksuppdelning ger $\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right\}\frac{dx}{dt}=2$.

Integrera med avseende på t : $\ln|x|-\ln|1-x|=2t+\ln|C_1|$.

Hyfsning ger $\ln\left|\frac{x}{1-x}\right|=2t+\ln|C_1|$, $\frac{1}{x(1-x)}\geq 0$ då $0\leq x<1$ ger $\frac{x}{1-x}=Ce^{2t}$.

Villkoret $x(0)=\frac{1}{2}$ ger $C=1$.

Vi sätter in $C=1$ i $\frac{x}{1-x}=Ce^{2t}$ och löser ut $x(t)$.

Då erhålles: $x(t)=\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}=\frac{1}{1+e^{-2t}}$.

Efter en månad är andelen infekterade lika med $x(1)=\frac{1}{1+e^{-2}}\approx 88$ %.

SVAR: Andelen infekterade efter en månad är $x(1)=\frac{1}{1+e^{-2}}\approx 88$ %.