KTH Matematik

Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).

Onsdagen den 12 januari 2005, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.
Uppgifterna: 1 och 3 ger 4p; 2, 4-6 ger 3p; 7-9 ger 5p.
Inga bonuspoäng räknas.

1. För en duvart gäller, att den dör ut om inte antalet individer N inom ett visst område överskrider ett tröskelvärde $T > 0$.
Å andra sidan finns en nivå $K > T$ sådan att tillgången på föda bara räcker till K individer.
Om den spontana tillväxtkoefficienten är $r > 0$, så modelleras ovanstående med följande differentialekvation för $N = N(t)$ som funktion av tiden t : $\frac{dN}{dt} = -r\left(\frac{N}{T} - 1\right)\left(\frac{N}{K} - 1\right)N$.
Studera denna icke-linjära differentialekvation enligt följande:
a. Bestäm alla stationära lösningar.
b. Avgör för varje stationär lösning om den är stabil eller instabil.
c. Kommentera även rimligheten i det erhållna resultatet.

2. Bestäm Fourierserien till funktionen som är π-periodisk och definieras av $f(t) = \sin^4 t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{d}{dx}(xy) = y^2\sqrt{x}$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.
Ange därefter lösningens existensintervall.

4. Lös ekvationen

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau \quad \text{, då } y(0) = 1 .$$

5. Betrakta differentialekvationen $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4e^x$, $x > 0$.
Motsvarande homogena differentialekvation har lösningar på formen $y = x^n$, där n är heltal.
Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen.

6. Differentialekvationen $x'' + a\left((x')^3 - x'\right) + x = 0$, där a är en reell parameter, kan omformas till ett system genom att sätta $y = x'$. Då blir $y' = -a\left(y^3 - y\right) - x$. Det uppkomna systemet har endast en kritisk punkt. Bestäm denna och avgör för vilka värden på parametern a som den kritiska punkten är en spiral samt när denna är stabil respektive instabil.

7. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ {}^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

Detta ger upphov till följande problem:
$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} \ , \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u'_x(\frac{\pi}{2},t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x \ , \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

vgv

8.a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell matris.
Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är reell- och vektorvärda funktioner.
Visa att även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ uppfyller systemet.
b) Låt den reella matrisen $\mathbf{A}$ ha egenvärdet $\lambda = \alpha + i\beta$ och
tillhörande egenvektor är $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + i\mathbf{v_2}$, där $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v}_2$ är reella vektorer.
Visa utgående från detta hur två reella linjärt oberoende lösningar till systemet kan erhållas.
c) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

9. En infektionssjukdom antas sprida sig i en sälstam med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet infekterade och antalet icke-infekterade individer.
Låt andelen infekterade individer vara lika med $x(t)$.
Vid ett visst tillfälle var halva populationen infekterad och spridningshastigheten var då så stor att, om den förbleve konstant, så skulle hela populationen vara infekterad efter 1 månad.
Hur stor del av populationen är i själva verket infekterad efter en månad ?