KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).
Tisdagen den 24 maj 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 trepoängsuppgifter. För godkänt krävs minst 15 poäng.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Del 1:

1. Tentamenskonstruktören håller på att baka en kaka och inser då att ett lämpligt tentamensproblem kan formuleras enligt följande:

En kaka tas ur ugnen. Efter 10 minuter är kakan 105°C och efter 30 minuter är kakan 65°C. Vid vilken tidpunkt, kaktemperaturen är då 35°C, kan en smakbit erhållas ?
Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$, där T_0 är rumstemperaturen 25°C och T är kakans temperatur i °C.

<u>Lösning:</u>

Vi erhåller differentialekvationen $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$
där k är en proportionalitetskonstant.
Differentialekvationen är linjär av första ordningen(även separabel).
Vi löser denna genom att addera allmänna homogena lösningen till en partikulärlösning. Då erhålles $T(t) = Ce^{kt} + T_0$. Bestäm konstanterna.

Insättning av villkoren ger: $\begin{cases} 105 = Ce^{k10} + 25 \\ 65 = Ce^{k30} + 25 \end{cases}$, $\begin{cases} 80 = Ce^{k10} \\ 40 = Ce^{k30} \end{cases}$, $\begin{cases} 2 = e^{-20k} \\ 40 = Ce^{k30} \end{cases}$,

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{20}\ln 2 \\ 40 = Ce^{k30} \end{cases}$, $\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{20}\ln 2 \\ C = 40e^{-k30} = 40e^{\frac{\ln 2}{20}30} = 40 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ vilket insatt i lösningen ger oss

följande uttryck $T(t) = 40 \cdot 2^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{20}\ln 2\, t} + 25 = 40 \cdot 2^{\frac{30-t}{20}} + 25$.
Vi söker tidpunkten då temperaturen är 35°C.
Insättning ger: $35 = 40 \cdot 2^{\frac{30-t}{20}} + 25$, $2^{\frac{30-t}{20}} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, $\frac{30-t}{20} = -2$, $t = 70$.

SVAR: Den sökta tiden är 70 minuter.

2. Differentialekvationen $ty'' - (1+t)y' + y = 0$ har en lösning $y = e^t$, $t > 0$.
Bestäm ekvationens allmänna lösning.

<u>Lösning:</u>

Vi använder reduktion av ordningen.
Sätt $y = e^t z$ i den givna differentialekvationen.
Då erhålles $t(e^t z'' + 2e^t z' + e^t z) - (1+t)(e^t z' + e^t z) + e^t z = 0$.
Förenkling ger: $tz'' + (t-1)z' = 0$. Sätt $u = z'$, $u' = z''$ vilket ger $tu' + (t-1)u = 0$.

Omformning ger $\frac{u'}{u} = \frac{1-t}{t} = \frac{1}{t} - 1$.

Integrera med avseende på t : $\ln|u| = \ln|t| - t + \ln|C_1|$, $u = C_2 te^{-t} = z'$.

Fortsatt integration ger: $z = C_2(-te^{-t} - e^{-t}) + C_4 = C_5(te^{-t} + e^{-t}) + C_4$.

Detta ger oss den allmänna lösningen

$y = e^t z = e^t(C_5(te^{-t} + e^{-t}) + C_4) = C_5(t+1) + C_4 e^t$.

SVAR: Den allmänna lösningen ges av $y = C_5(t+1) + C_4 e^t$.

3. Bestäm den lösning $y(t)$ till differentialekvationen

$y'(t) - 2y(t) = U(t-1)$, $t \geq 0$, som uppfyller villkoret $y(0) = 0$.

(U är "the unit step function", även kallad Heavisides funktion.)

<u>Lösning:</u>

Vi Laplacetransformerar differentialekvationen.

$sY(s) - 0 - 2Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-2)} = e^{-s}\frac{1}{2}(\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-2})$.

Återtransformera: $y(t) = U(t-1)\frac{1}{2}(-1 + e^{2(t-1)})$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = U(t-1)\frac{1}{2}(-1 + e^{2(t-1)})$.

4. Bestäm alla reellvärda funktioner $x(t)$ och $y(t)$

som satisfierar systemet $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 16x - 5y \end{cases}$.

<u>Lösning:</u>

Systemet skrives på matrisform. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer först egenvärden till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen

$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 16 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 17 = (\lambda + 1)^2 + 16$.

Egenvärdena är $\lambda = -1 \pm 4i$. Vi har erhållit komplexa egenvärden och då nöjer vi oss med att bestämma en egenvektor till ett av egenvärdena. Välj ett av dessa, tag tex $\lambda = -1 + 4i$.

En egenvektor svarande mot egenvärdet $\lambda = -1 + 4i$ fås ur systemet

$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 16 & -5-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ med egenvärdet $\lambda = -1 + 4i$ insatt.

Vi får $\begin{pmatrix} 4-4i & -2 \\ 16 & -4-4i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ och en lösning är $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-2i \end{pmatrix}$.

En komplex lösning till systemet är $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{\mathbf{t(-1+4i)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-2i \end{pmatrix}$.

Real- och imaginärdel av den komplexa lösningen ger oss två linjärt oberoende lösningar till systemet och därmed en bas för lösningsrummet. Den allmänna lösningen är en linjärkombination av de linjärt oberoende lösningarna.

Omformning av den komplexa lösning ger: $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}(\cos 4t + i\sin 4t)\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

$$\operatorname{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix}\cos 4t\\2\cos 4t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\sin 4t\end{pmatrix}\right\} = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos 4t\\2\cos 4t - 2\sin 4t\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix}\sin 4t\\2\sin 4t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\cos 4t\end{pmatrix}\right\} = e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 4t\\2\sin 4t - 2\cos 4t\end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1\operatorname{Re}\mathbf{Z} + c_2\operatorname{Im}\mathbf{Z} = c_1\mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos 4t\\2\cos 4t - 2\sin 4t\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 4t\\2\sin 4t - 2\cos 4t\end{pmatrix}.$$

SVAR: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1\operatorname{Re}\mathbf{Z} + c_2\operatorname{Im}\mathbf{Z} = c_1\mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos 4t\\2\cos 4t - 2\sin 4t\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 4t\\2\sin 4t - 2\cos 4t\end{pmatrix}$

5. Bestäm en funktion $u(x,y)$ som uppfyller differentialekvationen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + u$ och villkoret $u(x,0) = 3e^{5x} + 2e^{-3x}$.

Lösning:

Vi använder variabelseparation. Sätt $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Insättning ger: $X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) + X(x)Y(y)$.

Dividera med $X(x)Y(y)$: $\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} + 1 = \lambda$.

Den partiella differentialekvationen har omformats till ett system av ordinära differentialekvationer vilket skrives $\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ Y'(y) = (\lambda - 1)Y(y) \end{cases}$.

Detta har lösningen $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}$ och således $u(x,y) = ABe^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$.

Det givna villkoret ger oss lösningen $u(x,y) = 3e^{5x+4y} + 2e^{-3x-4y}$.

SVAR: Den sökta lösningen $u(x,y) = 3e^{5x+4y} + 2e^{-3x-4y}$.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + 4xy = xy^2$, $y(0) = 1$.

Lösning:

Vi har en differentialekvation av Bernoulli typ.

Omforma differentialekvationen $y^{-2}y' + 4xy^{-1} = x$.

Sätt: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$. Insättning ger: $-z' + 4xz = x$.

Vi har erhållit en linjär differentialekvation och omformar den på standardform: $z' - 4xz = -x$.

Multiplicera med en integrerande faktor. En sådan är e^{-2x^2}.

Vi erhåller $e^{-2x^2}z' - e^{-2x^2}4xz = -e^{-2x^2}x$. Omskrivning ger: $\frac{d}{dx}\left\{e^{-2x^2}z\right\} = -e^{-2x^2}x$.

Integrera med avseende på x: $e^{-2x^2} z = \frac{1}{4} e^{-2x^2} + C$.

Insättning av $z = y^{-1}$ ger: $e^{-2x^2} y^{-1} = \frac{1}{4} e^{-2x^2} + C$.

Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = \frac{3}{4}$. Vi får då $y^{-1} = \frac{1+3e^{2x^2}}{4}$, $y = \frac{4}{1+3e^{2x^2}}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{4}{1+3e^{2x^2}}$.

Anmärkning: Differentialekvationen är även separabel.

Del 2:

11. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

Lösning:

a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) - c$.

Med de givna värdena på konstanterna får vi

$y' = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{80}\right) - c = \frac{y(80-y)}{320} - c = \frac{y(80-y) - 320c}{320} = f(y)$.

b. Jämviktslösning erhålles då $f(y) = 0$.

Då är $y^2 - 80y + 320c = 0$, $(y-40)^2 = 1600 - 320c = 320(5-c)$.

Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \leq 5$.

För $c > 5$ existerar inga jämviktslösningar.

Jämviktslösningarna är $y = 40 \pm \sqrt{320(5-c)}$.

c. Vi bestämmer den stabila jämviktslösningen y_0 genom att studera tecknet hos $f'(y_0)$.

Jämviktslösningen är stabil om $f'(y_0) < 0$ och instabil om $f'(y_0) > 0$.

$f'(y) = \frac{80-2y}{320} = \frac{40-y}{160}$ och insättning av jämviktslösningarna ger

$f'(40 + \sqrt{320(5-c)}) = \frac{-\sqrt{320(40-c)}}{160} < 0$ stabil jämviktslösning.

$f'(40 - \sqrt{320(5-c)}) = \frac{\sqrt{320(40-c)}}{160} > 0$ instabil jämviktslösning.

SVAR: a. Den nya differentialekvationen är $y' = \frac{y(80-y)}{320} - c$.

b. Det kritiska värde på c är $c = 5$.

c. Jämviktsnivån $y_0 = 40 + \sqrt{320(5-c)}$.

12. Bestäm de kritiska punkterna till systemet av differentialekvationer $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = x+2y \end{cases}$ och avgör deras karaktär(sadelpunkt/nod/spiral/centrum resp stabil/instabil).

<u>Lösning:</u>

De kritiska punkterna erhålles då $\dfrac{dx}{dt} = 0$ och $\dfrac{dy}{dt} = 0$.

Detta inträffar i punkterna (0,0), (-2,1) och (2,-1).

De kritiska punkternas karaktär bestämmes genom studera det linjariserade systemet i de aktuella punkterna.

Detta sker med hjälp av Jacobimatrisen.

Jacobimatrisen blir: $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1-y^2 & -x2y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

I punkten (0,0) är $\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och dess egenvärden är 1 och 2.

Egenvärdena är positiva och skilda och den kritiska punkten är en instabil nod.

I punkten (-2,1) är $\mathbf{J}(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och dess egenvärden fås ur ekvationen

$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = (\lambda-1)^2 - 5$. Egenvärdena är $\lambda = 1 \pm \sqrt{5}$.

Egenvårdena är reella och har olika tecken och den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

I punkten (2,-1) är $\mathbf{J}(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och dess egenvärden är $\lambda = 1 \pm \sqrt{5}$.

Egenvårdena är reella och har olika tecken och den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

SVAR: (0,0) är en instabil nod och ±(2,-1) är sadelpunkt och därmed instabil.

13. Bestäm temperaturen $u(x,t)$ i en stång av längden L då temperaturen vid tiden $t=0$ är $f(x)$ och då stångens ändpunkter är isolerade. Temperaturen $u(x,t)$ följer värmeledningsekvationen $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Svaret får innehålla integraler.

<u>Lösning:</u>

Vi använder variabelseparation. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $kX''(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Dividera med $kX(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{kT(t)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära okopplade differentialekvationer:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda k T(t) = 0 \end{cases}.$$

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{\lambda kt}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$\boldsymbol{X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}}$	$\boldsymbol{X(x) = A_2 x + B_2}$	$\boldsymbol{X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x}$

Stavens ändpunkter är isolerade innebär att $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}(0, \boldsymbol{t}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{t}) = 0$.

Tillsammans med variabelseparationen ger detta att: $\boldsymbol{X}'(0)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{L})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t}) = 0$.

Detta skall gälla för alla $\boldsymbol{t}$: $\boldsymbol{X}'(0) = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{L}) = 0$.

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{e}^{\mu \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{e}^{-\mu \boldsymbol{x}})$	$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{x}) = \mu(-\boldsymbol{A}_3 \sin \mu \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_3 \cos \mu \boldsymbol{x})$

Insättning av ändpunkterna ger:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$\begin{cases} 0 = \boldsymbol{X}'(0) = \mu(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{B}_1) \\ 0 = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{L}) = \mu(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{e}^{\mu \boldsymbol{L}} - \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{e}^{-\mu \boldsymbol{L}}) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = \boldsymbol{X}'(0) = \boldsymbol{A}_2 \\ 0 = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{A}_2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 = \boldsymbol{X}'(0) = \mu(\boldsymbol{B}_3) \\ 0 = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{L}) = \mu(-\boldsymbol{A}_3 \sin \mu \boldsymbol{L} + \boldsymbol{B}_3 \cos \mu \boldsymbol{L}) \end{cases}$
Endast den triviala lösningen.	$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_2$	$\begin{cases} \boldsymbol{B}_3 = 0 \\ \mu \boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}\pi \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_3 \cos \dfrac{\boldsymbol{n}\pi \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{L}}$

Motsvarande "T-lösningar" blir:

$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
	$T(t) = C_2$	$T(t) = C_3 e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$

Vi har erhållit två uppsättningar med lösningar.

$\lambda = 0$	$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2\ ,\ \mu \quad \boldsymbol{R}$
$u(x,t) = B_2 C_2$	$u(x,t) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L} C_3 e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$$

Begynnelsevillkoret $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ger: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \dfrac{\boldsymbol{a}_0}{2} + \displaystyle\sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} \cos \frac{\boldsymbol{n}\pi \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{L}}$

Koefficienterna är: $\boldsymbol{a}_0 = \dfrac{2}{\boldsymbol{L}} \displaystyle\int_0^{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$ och $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} = \dfrac{2}{\boldsymbol{L}} \displaystyle\int_0^{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cos \frac{\boldsymbol{n}\pi \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{dx}$

SVAR: Den sökta lösningen ges av

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \quad \boldsymbol{a}_0 = \frac{2}{\boldsymbol{L}} \int_0^{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx} \text{ och } \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} = \frac{2}{\boldsymbol{L}} \int_0^{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cos \frac{\boldsymbol{n}\pi \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{dx}.$$

14. Låt $f(t)$ vara 2π-periodisk, d v s $f(t+2\pi)=f(t)$ för alla t, och låt

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi+t}{\pi}, & -\pi\le t\le 0\\[2mm] \dfrac{\pi-t}{\pi}, & 0\le t\le\pi\end{cases}.$$

a. Ange, t ex med hjälp av handboken β, fourierserieutvecklingen av f.

b. Bestäm en 2π-periodisk partikulärlösning till differentialekvationen $y''-y=f(t)$.

Lösningen får anges på serieform.

<u>Lösning:</u>

a. Enligt BETA under "Special Fourier series" avsnitt 13:1 återfinns utvecklingen till vår givna funktion.

Utvecklingen har formen $\dfrac{h}{2}+\dfrac{4h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{L}$ där $h=1$ och $L=\pi$.

Vår funktion $f(t)$ tilldelas serien $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

b. Vi ansätter en 2π-periodisk partikulärlösning till differentialekvationen $y''-y=f(t)$.

Lösningen är på formen $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)t$.

Insättning i differentialekvationen ger

$$-\sum_{n=1}^{\infty}a_n(2n-1)^2\cos(2n-1)t-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)t=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t\ .$$

Identifiering ger: $-\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2}$ och $-a_n(2n-1)^2-a_n=\dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$,

$$a_n=\frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2(1+(2n-1)^2)}$$

SVAR: a. Vår funktion $f(t)$ tilldelas serien $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

b. Lösningen är $\dfrac{-1}{2}+\dfrac{-4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2(1+(2n-1)^2)}\cos(2n-1)t$.