KTH Matematik

Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).

Tisdagen den 24 maj 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 6 trepoängsuppgifter. För godkänt krävs minst 15 poäng.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar 20 poäng.
Poängfördelning på del 2: 11-14 ger 5 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 9 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom godkänt på del 1 även minst 15 poäng på del 2.
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Del 1:

1. Tentamenskonstruktören håller på att baka en kaka och inser då att ett lämpligt tentamensproblem kan formuleras enligt följande:

En kaka tas ur ugnen. Efter 10 minuter är kakan 105°C och efter 30 minuter är kakan 65°C. Vid vilken tidpunkt, kaktemperaturen är då 35°C, kan en smakbit erhållas ?
Avsvalningshastigheten antas vara proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$, där T_0 är rumstemperaturen 25°C och T är kakans temperatur i °C.

2. Differentialekvationen $ty'' - (1+t)y' + y = 0$ har en lösning $y = e^t$, $t > 0$.
Bestäm ekvationens allmänna lösning.

3. Bestäm den lösning $y(t)$ till differentialekvationen
$y'(t) - 2y(t) = U(t-1)$, $t \geq 0$, som uppfyller villkoret $y(0) = 0$.
(U är "the unit step function", även kallad Heavisides funktion.)

4. Bestäm alla reellvärda funktioner $x(t)$ och $y(t)$
som satisfierar systemet $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 16x - 5y \end{cases}$.

5. Bestäm en funktion $u(x,y)$ som uppfyller
differentialekvationen $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + u$ och villkoret

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + 4xy = xy^2$, $y(0) = 1$.

vgv

Del 2:

11. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen
$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].
Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).
a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.
b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.
c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

12. Bestäm de kritiska punkterna till systemet av differentialekvationer $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ och avgör deras karaktär(sadelpunkt/nod/spiral/centrum resp stabil/instabil).

13. Bestäm temperaturen $u(x,t)$ i en stång av längden L då temperaturen vid tiden $t = 0$ är $f(x)$ och då stångens ändpunkter är isolerade. Temperaturen $u(x,t)$ följer värmeledningsekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
Svaret får innehålla integraler.

14. Låt $f(t)$ vara 2π-periodisk, d v s $f(t + 2\pi) = f(t)$ för alla t, och låt
$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi + t}{\pi}, & -\pi \le t \le 0 \\ \frac{\pi - t}{\pi}, & 0 \le t \le \pi \end{cases}.$$
a. Ange, t ex med hjälp av handboken β , fourierserieutvecklingen av f .
b. Bestäm en 2π-periodisk partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - y = f(t)$.
Lösningen får anges på serieform.