KTH Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).

Tisdagen den 23 augusti 2005, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.

Uppgifterna: 1, 3-4 och 6 ger 4p; 2, 5 och 7 ger 3p; 8-9 ger 5p.

Inga bonuspoäng räknas.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

1. En 500 liters tank innehåller ursprungligen 10 gram salt löst i 200 liter vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.25 gram per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 4 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut. När är tanken full ? Ställ upp en differentialekvation för mängden av salt $Q(t)$. Bestäm koncentrationen $K(t)$ gram per liter i tanken vid en godtycklig tidpunkt t .

<u>Lösning</u>:

Tanken är full då det har pumpats in 500-200=300 liter lösning.

Detta inträffar efter 300/(4-2)=150 minuter.

Vätskevolymen i tanken vid en godtycklig tidpunkt t ges av $L(t) = 200 + 2t$.

Differentialekvationen för mängden salt $Q(t)$ ges av

$$\frac{dQ}{dt} = 0.25(\text{g/l})\ 4(l/\text{min}) - \frac{Q(t)}{L(t)}(\text{g/l})\ 2(\text{l/min}) = 1 - \frac{Q(t)}{100+t}.$$

Vi har erhållit en linjär differentialekvation.

Den kan skrivas $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{100+t} = 1$, $(100+t)\frac{dQ}{dt} + Q(t) = 100 + t$, $\frac{d}{dt}\{(100+t)Q(t)\} = 100 + t$.

Integration med avseende på t ger $(100+t)Q(t) = \frac{(100+t)^2}{2} + C$.

Vid tiden $t = 0$ är $Q = 10$ vilket ger att $C = 100\ 10 - \frac{100^2}{2} = -4000$.

Mängden salt vid en godtycklig tidpunkt t ges av $Q(t) = \frac{100+t}{2} - \frac{4000}{100+t}$

Koncentrationen $K(t) = \frac{Q(t)}{L(t)} = \frac{1}{4} - \frac{2000}{(100+t)^2}$.

SVAR: Tanken är tom efter 150 minuter. Koncentrationen $K(t) = \frac{1}{4} - \frac{2000}{(100+t)^2}$ gram per liter.

2. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

<u>Lösning</u>:

Stationära lösningar erhålles då derivatan är lika med noll, dvs då $y = 1$, $y = 2$ och $y = 3$.

Vi studerar derivatans tecken.

$y > 3$: $\frac{dy}{dx} > 0$, y är växande.

$3 > y > 2$: $\frac{dy}{dx} < 0$, y är avtagande.

$2 > y > 1$: $\frac{dy}{dx} > 0$, y är växande.

$1 > y$: $\frac{dy}{dx} < 0$, y är avtagande.

De stationära lösningarna $y = 1$ och $y = 3$ är instabila och den stationära lösningen $y = 2$ är stabil.

SVAR: $y = 1$ och $y = 3$ är instabila och $y = 2$ är stabil.

3. Bestäm jämviktspunkterna till systemet $\begin{cases} x'(t) = 2xy \\ y'(t) = -x + 3y + 1 \end{cases}$

och deras art(sadel/nod/spiral , stabil/instabil) .

Lösning:

I jämviktspunkterna är tangentvektorn(hastighetsvektorn) lika med nollvektorn.

Vi får $\begin{cases} 0 = 2xy \\ 0 = -x + 3y + 1 \end{cases}$ vilket ger oss två jämviktspunkter $(0,-\frac{1}{3})$ och $(1,0)$.

För att undersöka jämviktspunkternas art studerar vi det linjariserade systemet, vilket sker genom att vi studerar Jacobimatrisen (funktionalmatrisen) i de aktuella punkterna.

Jacobimatrisen är lika med $\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$(0,-\frac{1}{3})$

Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ är diagonal och har reella, skilda egenvärden med olika tecken. Jämviktspunkten $(0,-\frac{1}{3})$ är en sadelpunkt och därmed instabil.

$(1,0)$

Matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ger information rörande dess egenvärden. Dessa erhålles ur ekvationen

$$0 = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Egenvärdena är reella, positiva och skilda.

Jämviktspunkten $(1,0)$ är en instabil nod.

SVAR: Jämviktspunkterna är $(0,-\frac{1}{3})$, en sadelpunkt och därmed instabil, och $(1,0)$ är instabil nod.

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y(t) = f(t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $t \geq 0$, där

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , \ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -1 \ , \ t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Beräkna även $y(\frac{3\pi}{2})$.

Lösning:

Vi använder oss av Laplacetransformation för att lösa problemet.

Vi omformar $f(t)$ med hjälp av Heavisides stegfunktion $U(t-a)$.

Vi får $f(t) = 1 - 2U(t - \frac{\pi}{2})$, vars Laplacetransform är $F(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s}$.

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = F(s)$.

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \dfrac{2s-1}{s^2+1} + \dfrac{F(s)}{s^2+1} = \dfrac{2s-1}{s^2+1} + \dfrac{1-2e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s(s^2+1)}$.

Partialbråksuppdelning ger: $Y(s) = \dfrac{2s-1}{s^2+1} + \left\{\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}\right\}(1 - 2e^{-s\frac{\pi}{2}})$.

Återtransformera: $y(t) = 2\cos t - \sin t + 1 - \cos t - 2U(t - \frac{\pi}{2})(1 - \cos(t - \frac{\pi}{2}))$.

Förenkling ger: $y(t) = \cos t - \sin t + 1 - 2U(t - \frac{\pi}{2})(1 - \sin t)$.

$$y(\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + 1 - 2U(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})(1 - \sin\frac{3\pi}{2}) = 0 + 1 + 1 - 2\cdot 2 = -2$$

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = \cos t - \sin t + 1 - 2U(t - \frac{\pi}{2})(1 - \sin t)$. $y(\frac{3\pi}{2}) = -2$.

5. Lös fullständigt ekvationen $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = e^{x^2}$ genom att först sätta $y(x) = v(x)\, e^{x^2}$ och sedan lösa den differentialekvation som erhålls för funktionen $v(x)$.

<u>Lösning</u>:
Insättning i differentialekvationen ger

$$\left\{v''e^{x^2} + v'4xe^{x^2} + v(2 + 4x^2)e^{x^2}\right\} - 4x\left\{v'e^{x^2} + v2xe^{x^2}\right\} + (4x^2 - 1)ve^{x^2} = e^{x^2}$$

Förenkling ger $v'' + v = 1$.
Allmänna homogena lösningen är $v_h = A\cos x + B\sin x$ och en partikulärlösning är $v_p = 1$.
Den allmänna lösningen är $v = v_h + v_p = A\cos x + B\sin x + 1$.
Den ursprungliga differentialekvationen har lösningen $y = (A\cos x + B\sin x + 1)e^{x^2}$
SVAR: Den sökta lösningen är $y = (A\cos x + B\sin x + 1)e^{x^2}$.

6. En partikels läge ges av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X}$ anger partikelns läge i planet. Vidare gäller att partikeln befinner sig i punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vid tiden $t = 0$. Bestäm partikelns läge vid en godtycklig tidpunkt t samt avgör vad som händer med partikeln efter lång tid.

<u>Lösning</u>:
Vi bestämmer först matrisens egenvärden.
Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 17 = (\lambda - 1)^2 + 16$.
Egenvärdena är komplexa och lika med $\lambda = 1 \pm 4i$.
Välj ett av egenvärdena och bestäm tillhörande egenvektor.
Vi väljer $\lambda = 1 + 4i$.
En egenvektor erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ med egenvärdet insatt.

$$\begin{pmatrix} 4 - 1 - 4i & -5 \\ 5 & -2 - 1 - 4i \end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \;,\; \begin{pmatrix} 3 - 4i & -5 \\ 5 & -3 - 4i \end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \;,\; \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 + 4i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = e^{(1+4i)t}\begin{pmatrix} 3 + 4i \\ 5 \end{pmatrix} = e^t(\cos 4t + i\sin 4t)\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Realdel och imaginärdel av denna komplexa lösning ger två linjärt oberoende lösningar till systemet.

Vi får $\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^t\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\cos 4t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 4t\right\} = e^t\begin{pmatrix} 3\cos 4t - 4\sin 4t \\ 5\cos 4t \end{pmatrix}$

och $\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^t\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\sin 4t + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 4t\right\} = e^t\begin{pmatrix} 3\sin 4t + 4\cos 4t \\ 5\sin 4t \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1e^t\begin{pmatrix} 3\cos 4t - 4\sin 4t \\ 5\cos 4t \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} 3\sin 4t + 4\cos 4t \\ 5\sin 4t \end{pmatrix}$.

Begynnelsevillkoret ger $\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix} = \mathbf{X}(0) = c_1\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Den sökta lösningen är $\mathbf{X} = e^t\begin{pmatrix}3\cos 4t - 4\sin 4t\\ 5\cos 4t\end{pmatrix} + 2e^t\begin{pmatrix}3\sin 4t + 4\cos 4t\\ 5\sin 4t\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}11\cos 4t - 2\sin 4t\\ 5\cos 4t + 10\sin 4t\end{pmatrix}$.

Partikeln beskriver en utåtgående spiral och avlägsnar sig obegränsat.

SVAR: Den sökta lösningen är $\mathbf{X} = e^t\begin{pmatrix}11\cos 4t - 2\sin 4t\\ 5\cos 4t + 10\sin 4t\end{pmatrix}$ och partikeln avlägsnar sig obegränsat.

7. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a,b).
Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a,b).
Låt vidare y_1 och y_2 vara lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a,b).

Visa Abels formel $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$, där $W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2.

<u>Lösning</u>:

y_1 och y_2 uppfyller differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, vilket innebär att vi får följande system: $\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$.

Wronskianen av y_1 och y_2 ges av $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$.

Vi omformar systemet så att Wronskianen uppkommer i detta system.
Multiplicera den första ekvationen med y_2 och den andra ekvationen med y_1 samt bilda differensen av mellan de nya ekvationerna.

$\begin{cases} (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)y_2 = 0 \\ (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)y_1 = 0 \end{cases}$ $\quad -y_1''y_2 + y_2''y_1 + p(x)(-y_1'y_2 + y_2'y_1) = 0$,

$\frac{d}{dx}\left\{y_2'y_1 - y_1'y_2\right\} + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0$, $\frac{d}{dx}W(x) + p(x)W(x) = 0$.

Vi har erhållit en differentialekvation i Wronskianen $W(x)$.

Differentialekvationen är separabel $\frac{1}{W(x)}\frac{dW(x)}{dx} = -p(x)$.

Integrera från x_0 till x: $\int_{x_0}^{x}\frac{1}{W(x)}\frac{dW(x)}{dx}dx = \int_{x_0}^{x} -p(x)dx$, $\ln|W(x)| = C_1 + \int_{x_0}^{x} -p(x)dx$

$W(x) = \pm e^{C_1}e^{\int_{x_0}^{x} -p(x)dx} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$,

För x lika med x_0 är $W(x)$ lika med $W(x_0)$ vilket ger $C = W(x_0)$.

Vi har fått $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$. VSV.

SVAR: Se ovan.

8.a. Låt $f(t)$ vara styckvis kontinuerlig på $[0,\infty)$, av exponentiell ordning och periodisk med perioden T. Härled f:s Laplacetransformation $F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$ utgående från definitionen.

b. Begynnelsevärdesproblemet $y''+y=\Phi_\varepsilon(t)$, $t>0$, $y(0)=y'(0)=0$ beskriver en svängningskrets med en högfrekvent insignal $\Phi_\varepsilon(t)$, nämnligen fyrkants-vågen

$\Phi_\varepsilon(t)=\begin{cases}1 \ , \ 0<t<\varepsilon \\ 0 \ , \ \varepsilon<t<2\varepsilon\end{cases}$ och $\Phi_\varepsilon(t+2\varepsilon)=\Phi_\varepsilon(t)$, där ε är ett litet tal.

Lösningen $y(t)$ beror på ε, $y(t)=y_\varepsilon(t)$. Bestäm gränsfunktionen $y_0(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$.

Ledning: Gränsövergången kan med fördel göras på Laplacetransformsidan.

Lösning:

a. Enligt definitionen på Laplacetransform får vi $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$,

där vi har delat upp integralen i två delar. I den andra integralen gör vi substitutionen $u=t-T$ och erhåller ur detta $du=dt$ samt nya gränser.

Insättning i integralen ger $\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-s(u+T)}f(u+T)du=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u+T)du$.

f är periodisk med perioden T, vilket innebär att $f(u+T)=f(u)$.

Insättning i integralen ger $\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt=e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du=e^{-sT}F(s)$.

Insättning i den första ekvationen ger $F(s)=\int_0^T e^{-st}f(t)dt+e^{-sT}F(s)$.

Lös ut $F(s)$, vilket ger $F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$. vsv.

b. Laplacetransformera differentialekvationen.

$s^2Y(s)+Y(s)=\frac{1}{1-e^{-s2\varepsilon}}\int_0^{2\varepsilon}\Phi_\varepsilon(t)e^{-st}dt$, $\int_0^{2\varepsilon}\Phi_\varepsilon(t)e^{-st}dt=\int_0^{\varepsilon}1e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\varepsilon}=\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{s}$

$Y(s)=\frac{1}{1+e^{-s\varepsilon}}\frac{1}{s(s^2+1)}$. Låt $\varepsilon\to 0$: $L\{y_0(t)\}=\frac{1}{2}\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right\}$.

Återtransformera: $y_0(t)=\frac{1}{2}\{1-\cos t\}$.

SVAR: a. Se ovan. b. Begynnelsevärdesproblemet har lösningen $y_0(t)=\frac{1}{2}\{1-\cos t\}$.

9. Låt $f(t)$ vara 2π-periodisk, d v s $f(t+2\pi)=f(t)$ för alla t, och låt

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\pi+t}{\pi} \ , \ -\pi\le t\le 0 \\ \frac{\pi-t}{\pi} \ , \ 0\le t\le\pi\end{cases}.$$

a. Ange, t ex med hjälp av handboken β, fourierserieutvecklingen av f.

b. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y''+y=f(t)$.

Lösningen får anges på serieform.

Lösning:

a. Enligt BETA under "Special Fourier series" avsnitt 13:1 återfinns utvecklingen till vår givna funktion.

Utvecklingen har formen $\frac{h}{2}+\frac{4h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{L}$ där $h=1$ och $L=\pi$.

Vår funktion $f(t)$ tilldelas serien $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

b. Vi ansätter en partikulärlösning till differentialekvationen $y''+y=f(t)$.

Vi försöker med en lösning på formen $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)t$.

Insättning i differentialekvationen ger

$$-\sum_{n=1}^{\infty}a_n(2n-1)^2\cos(2n-1)t+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)t=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t.$$

Identifiering ger: $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$ och $-a_n(2n-1)^2+a_n=\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $a_n=\frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2(1-(2n-1)^2)}$.

Observera att här måste n vara skild ifrån ett.
För fallet n lika med ett göres ansatsen $y_{p_1}=at\cos t+bt\sin t$

Insättning i differentialekvationen $y''+y=\frac{4}{\pi^2}\cos t$ ger

$$-2a\sin t+2b\cos t-t(a\cos t+b\sin t)+at\cos t+bt\sin t=\frac{4}{\pi^2}\cos t,$$

$-2a\sin t+2b\cos t=\frac{4}{\pi^2}\cos t$, vilket ger $a=0$, $b=\frac{2}{\pi^2}$ dvs $y_{p_1}=\frac{2}{\pi^2}t\sin t$.

SVAR: a. Vår funktion $f(t)$ tilldelas serien $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$.

b. Lösningen är $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}t\sin t-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(1-(2n-1)^2)}\cos(2n-1)t$.