Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).
Tisdagen den 23 augusti 2005, kl 0800-1300.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 16-23p; 4: 24-30p; 5: 31p-.
Uppgifterna: 1, 3-4 och 6 ger 4p; 2, 5 och 7 ger 3p; 8-9 ger 5p.
Inga bonuspoäng räknas.
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

1. En 500 liters tank innehåller ursprungligen 10 gram salt löst i 200 liter vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.25 gram per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 4 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut. När är tanken full ? Ställ upp en differentialekvation för mängden av salt $Q(t)$. Bestäm koncentrationen $K(t)$ gram per liter i tanken vid en godtycklig tidpunkt t .

2. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3)$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

3. Bestäm jämviktspunkterna till systemet $\begin{cases} x'(t) = 2xy \\ y'(t) = -x + 3y + 1 \end{cases}$ och deras art(sadel/nod/spiral , stabil/instabil) .

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y(t) = f(t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $t \geq 0$, där

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , \ 0 \leq t < \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \ , \ t \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Beräkna även $y(\frac{3\pi}{2})$.

5. Lös fullständigt ekvationen $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = e^{x^2}$ genom att först sätta $y(x) = v(x)\ e^{x^2}$ och sedan lösa den differentialekvation som erhålls för funktionen $v(x)$.

6. En partikels läge ges av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, där $\mathbf{X}$ anger partikelns läge i planet. Vidare gäller att partikeln befinner sig i punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vid tiden $t = 0$. Bestäm partikelns läge vid en godtycklig tidpunkt t samt avgör vad som händer med partikeln efter lång tid.

7. Låt p och q vara kontinuerliga på intervallet (a,b).
Låt x_0 vara en godtycklig punkt på intervallet (a,b).
Låt vidare y_1 och y_2 vara lösningar till differentialekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet (a,b).

Visa Abels formel $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$, där $W(x)$ är Wronskianen till lösningarna y_1 och y_2.

vgv

8.a. Låt $f(t)$ vara styckvis kontinuerlig på $[0,\infty)$, av exponentiell ordning och periodisk med perioden T . Härled f :s Laplacetransformation $F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$ utgående från definitionen.

b. Begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = \Phi_\varepsilon(t)$, $t > 0$, $y(0) = y'(0) = 0$ beskriver en svängningskrets med en högfrekvent insignal $\Phi_\varepsilon(t)$, nämnligen fyrkants-vågen

$$\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 \ , \ 0 < t < \varepsilon \\ 0 \ , \ \varepsilon < t < 2\varepsilon \end{cases}$$ och $\Phi_\varepsilon(t+2\varepsilon) = \Phi_\varepsilon(t)$, där ε är ett litet tal.

Lösningen $y(t)$ beror på ε , $y(t) = y_\varepsilon(t)$. Bestäm gränsfunktionen $y_0(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$.

Ledning: Gränsövergången kan med fördel göras på Laplacetransformsidan.

9. Låt $f(t)$ vara 2π -periodisk, d v s $f(t+2\pi) = f(t)$ för alla t, och låt

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi + t}{\pi} \ , & -\pi \le t \le 0 \\ \dfrac{\pi - t}{\pi} \ , & 0 \le t \le \pi \end{cases} .$$

a. Ange, t ex med hjälp av handboken β , fourierserieutvecklingen av f .

b. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' + y = f(t)$.

Lösningen får anges på serieform.