KTH Matematik

**Lösningsförslag till tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).**
Lördagen den 14 januari 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 16-23; 4: 24-30p; 5: 31-35p.

Uppgifterna: 1-3, 6 ger 3 poäng vardera, 4, 7 ger 4 poäng vardera 5, 8-9 ger 5 poäng vardera.

1. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $y' = y(2-y)(4-y)$.

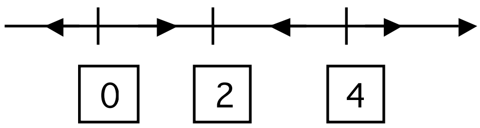
Lösning:

Vi börjar med att bestämma stationära lösningar. Då gäller att $y' = 0$.

Vi erhåller: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ och $y_3 = 4$.

Teckenstudie av derivatan ger:
$$\begin{cases} y' < 0 \text{ då } y < 0 & \Rightarrow\ y \text{ avtagande då } y < 0. \\ y' > 0 \text{ då } 0 < y < 2 & \Rightarrow\ y \text{ växande då } y < 0. \\ y' < 0 \text{ då } 2 < y < 4 & \Rightarrow\ y \text{ avtagande då } y < 0. \\ y' > 0 \text{ då } 4 < y & \Rightarrow\ y \text{ växande då } y < 0. \end{cases}$$

Vi ritar det endimensionella fasporträttet.




$y_1 = 0$ är en instabil kritisk punkt.
$y_2 = 2$ är en stabil kritisk punkt.
$y_3 = 4$ är en instabil kritisk punkt.

SVAR: $y_1 = 0$ och $y_3 = 4$ är instabila kritiska punkter och $y_2 = 2$ är en stabil kritisk punkt.

2. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}$.

Lösning:

Vi skriver om systemet på matrisform och bestämmer matrisens egenvärden och egenvektorer.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbf{A}$:s egenvärden erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$. Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Motsvarande egenvektorer $\mathbf{K}$ erhålles ur $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = 0$.

För $\lambda_1 = -1$ får vi $\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet är $\mathbf{X}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$.

För $\lambda_2 = 4$ får vi $\begin{pmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

En egenvektor är $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet är $\mathbf{X}_2 = e^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av en godtycklig linjärkombination av de två erhållna lösningarna.

Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t}\end{pmatrix}$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = \delta(t - \frac{\pi}{2})$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ , $y'(0) = 0$, där $\delta(t - \frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

<u>Lösning:</u>

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = e^{-s\frac{\pi}{2}}$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 5) = e^{-s\frac{\pi}{2}} + s + 2 \qquad Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s^2+2s+5}$$

$$Y(s) = \frac{s+1+\frac{1}{2}2}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-s\frac{\pi}{2}}$$

Återtransformera

$$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t) + \frac{1}{2}U(t - \frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t - \frac{\pi}{2}).$$

SVAR: Differentialekvationens lösning är

$$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t) + \frac{1}{2}U(t - \frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t - \frac{\pi}{2})$$

4. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2y'' + axy' + by = 0$ ges av $y_1 = x$ och $y_2 = x^2$.
Vidare finns det en har motsvarande inhomogen differentialekvation med partikulärlösningen $y_p = x\ln x$.
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

<u>Lösning:</u>

Insättning av lösningarna i differentialekvationen ger följande system: $\begin{cases} y_1 = x \Rightarrow x^2 0 + ax1 + bx = 0 \\ y_2 = x^2 \Rightarrow x^2 2 + ax2x + bx^2 = 0\end{cases}$.

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2 + 2a + b = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -2\end{cases}.$$

Den homogena differentialekvationen är $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.
En partikulärlösning är $y_p = x\ln x$ vilket insatt i vänstra ledet ovan ger den inhomogena differentialekvationens högerled.
Vi får $x^2\frac{1}{x} - 2x(\ln x + x\frac{1}{x}) + 2x\ln x = -x$.
Vår sökta differentialekvation är $x^2y'' - 2xy' + 2y = -x$.
SVAR: Den sökta differentialekvationen är $x^2y'' - 2xy' + 2y = -x$.

5. En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm eventuella stationära punkter.

Klassificera med avseende på stabilitet och typ. Bestäm systemets allmänna lösning.

Vart tar partikeln vägen då $t$ växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ?

Lösning:
Den finns endast en stationär punkt, origo, ty matrisens determinant är skild ifrån noll.
Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 5 & -3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \ , \quad (\lambda+1)^2 + 1 = 0 \ , \ \lambda = -1 \pm \boldsymbol{i}.$$

Komplexa egenvärden med negativ realdel innebär att det är en stabil spiralpunkt.
Bestäm en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + \boldsymbol{i}$.

$$0 = \begin{pmatrix}1-(-1+\boldsymbol{i}) & -1\\ 5 & -3-(-1+\boldsymbol{i})\end{pmatrix}\mathbf{K} = \begin{pmatrix}2-\boldsymbol{i} & -1\\ 5 & -2-\boldsymbol{i}\end{pmatrix}\mathbf{K} \ , \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix}1\\ 2-\boldsymbol{i}\end{pmatrix}.$$

En komplex lösning ges av: $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{(-1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ 2-\boldsymbol{i}\end{pmatrix} = \mathbf{e}^{-t}(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t)\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \boldsymbol{i}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Real- och imaginärdelen av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.

$$\mathbf{X_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin t\right) = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t + \sin t\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\sin t\right) = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t + 2\sin t\end{pmatrix}$$

Allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X_1} + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t + \sin t\end{pmatrix} + c_2\mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t + 2\sin t\end{pmatrix}$.

Egenvärdenas realdel är negativ, detta ger att då $t$ växer obegränsat kommer $\mathbf{X}(t)$ att gå mot nollvektorn.
Partikeln går mot origo längs en spiral, då $t$ växer obegränsat.

SVAR: Den stationära punkten, origo, är en stabil spiralpunkt.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t + \sin t\end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t + 2\sin t\end{pmatrix}$.

Partikeln går mot origo längs en spiral, då $t$ växer obegränsat.

6. Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalen till en godtycklig punkt $(x, y)$ på kurvan skär x-axeln i punkten $(x+1, 0)$ ?

Lösning:

I en godtycklig punkt $(x_0, y_0)$ på kurvan är tangentens lutning $y'(x_0)$ och normalens $-\dfrac{1}{y'(x_0)}$.

Normalens ekvation är därför $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Punkten $(x_0 + 1, 0)$ skall ligga på normalen, vilket ger $-\dfrac{1}{y'(x_0)} = \dfrac{0 - y_0}{x_0 + 1 - x_0}$ , $y'(x_0)y_0 = 1$.

Detta skall gälla i varje punkt $(x_0, y_0)$ på kurvan, vilket ger differentialekvationen $y'y = 1$.
Vi har en separabel differentialekvation. Multiplicera med två och integrera.
Vi får $y^2 = 2x + C$ eller $y = \pm\sqrt{2x + C}$ där $x > -\dfrac{C}{2}$.

SVAR: De sökta kurvorna är $y = \pm\sqrt{2x + C}$ där $x > -\dfrac{C}{2}$.

7. Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = |\ x\ | + x\ ,\ -1 < x < 1$.
Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = 1$.

<u>Lösning:</u>

Den givna funktionen är varken jämn eller udda.

Funktionen $f$ tilldelas Fourierserien $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\dfrac{n\pi x}{1} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{1} \right)$.

Ett sätt att erhålla den sökta fourierserien är att utnyttja BETA.
Den givna funktionen $f(x) = |x| + x$ delas upp i två delar, $f_1(x) = |x|$ och $f_2(x) = x$.

Enligt BETA har $f_1(x) = |x|$ fourierserien $\dfrac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\dfrac{1 - \cos n\pi}{(n\pi)^2} \cos n\pi x \right)$.

Enligt BETA har $f_2(x) = x$ fourierserien $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\dfrac{-\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x \right)$.

Addition ger att $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ har fourierserien

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\frac{1 - \cos n\pi}{(n\pi)^2} \cos n\pi x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\frac{-\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x \right)$$

Det återstår att bestämma fourierseriens summa för $x = 1$. Här är den givna funktionen ej kontinuerlig, men funktionen och dess derivata är styckvis kontinuerlig på hela reella axeln.
Fourierseriens summa för $x = 1$ blir medelvärdet $\dfrac{f(1+) + f(1-)}{2} = \dfrac{0 + 2 \cdot 1}{2} = 1$.

---

Ett annat sätt att bestämma Fourierserien är följande.

Vi omformar den givna funktionen: $f(x) = |x| + x = \begin{cases} 2x\ , & 0 \le x < 1 \\ 0\ , & -1 < x < 0 \end{cases}$.

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 2x\cos n\pi x\,dx = \{\text{partiell integration}\} =$$

$$= \left[2x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx = 2\left[\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = 2\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_0^1 2x\,dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 2x\sin n\pi x\,dx = \{\text{partiell integration}\} =$$

$$= \left[2x\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}dx = 2\frac{-\cos n\pi}{n\pi} - 2\left[\frac{-\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_0^1 = 2\frac{-\cos n\pi}{n\pi}.$$

Vi har erhållit följande fourierserie: $\dfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\dfrac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x + 2\dfrac{-\cos n\pi}{n\pi}\sin n\pi x \right)$.

---

SVAR: Den sökta Fourierserien är $\dfrac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\dfrac{1 - \cos n\pi}{(n\pi)^2}\cos n\pi x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2\dfrac{-\cos n\pi}{n\pi}\sin n\pi x \right)$ och dess seriesumma för $x = 1$ är lika med ett.

8. Låt $u(x,t)$ vara temperaturen i en smal stav med längden $L$

Vidare gäller att $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < L,\ t > 0,\ h$ är en konstant.

Bestäm temperaturen $u(x,t)$ då begynnelsetemperaturen är $f(x)$ och stavens ändpunkter är isolerade.

Bestäm därefter temperaturen då $L = \pi$ och $f(x) = 2 + \cos 3x$.

<u>Lösning:</u>

Vi separerar variablerna: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X''(x)T(t) - hX(x)T(t) = X(x)T'(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} + h = \text{konstant} = \lambda$.

Vi erhåller ett system av linjära okopplade differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - (\lambda - h)T(t) = 0 \end{cases}$.

"T-ekvationen" har lösningen: $T(t) = Ce^{(\lambda - h)t}$.

För "X-ekvationen" behandlas tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$ | $X(x) = A_2 x + B_2$ | $X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$ |

Stavens ändpunkter är isolerade innebär att $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$.

Tillsammans med variabelseparationen ger detta att: $X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$.

Detta skall gälla för alla $t$: $X'(0) = X'(L) = 0$.

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$ | $X'(x) = A_2$ | $X'(x) = \mu(-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$ |

Insättning av ändpunkterna ger:

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(A_1 - B_1) \\ 0 = X'(L) = \mu(A_1 e^{\mu L} - B_1 e^{-\mu L}) \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 = X'(0) = A_2 \\ 0 = X'(L) = A_2 \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu(B_3) \\ 0 = X'(L) = \mu(-A_3 \sin \mu L + B_3 \cos \mu L) \end{cases}$ |
| Endast den triviala lösningen. | $X(x) = B_2$ | $\begin{cases} B_3 = 0 \\ \mu L = n\pi \end{cases}$ $X(x) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L}$ |

Motsvarande "T-lösningar" blir:

| $\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| | $T(t) = C_2 e^{-ht}$ | $T(t) = Ce^{(-(\frac{n\pi}{L})^2 - h)t}$ |

Vi har erhållit två uppsättningar med lösningar.

| $\lambda = 0$ | $\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|
| $u(x,t) = B_2 C_2 e^{-ht}$ | $u(x,t) = A_3 \cos \dfrac{n\pi x}{L} C_3 e^{(-(\frac{n\pi}{L})^2 - h)t}$ |

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.

Den lösning som uppfyller de givna randvillkoren är på formen:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} e^{-ht} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-((\frac{n\pi}{L})^2 + h)t}$$

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ ger: $f(x) = u(x,0) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$

Koefficienterna är: $\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx}$ och $\boldsymbol{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx}$.

$L=\pi$ och $f(x)=2+\cos 3x$ ger $f(x)=2+\cos 3x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$.

Identifiering ger: $a_0=4$, $a_3=1$ och övriga $a_n=0$.

Den sökta lösningen är $u(x,t)=2e^{-ht}+\cos 3x\cdot e^{-((\frac{3\pi}{L})^2+h)t}$.

SVAR: Temperaturen $u(x,t)=\frac{a_0}{2}e^{-ht}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\,e^{-((\frac{n\pi}{L})^2+h)t}$

där koefficienterna är: $a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ och $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$.

Speciellt med $L=\pi$ och $f(x)=2+\cos 3x$ erhålles temperaturen

$u(x,t)=2e^{-ht}+\cos 3x\cdot e^{-((\frac{3\pi}{L})^2+h)t}$.

9. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt $\Phi$ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi=\begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t}\end{pmatrix}$.

Lösning:
a) I en fundamentalmatris $\Phi$ till systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ består kolumnerna av de linjärt oberoende lösningarna till systemet. Då matrisen $\mathbf{A}$ är nxn krävs n linjärt oberoende lösningar.
b) Varje kolumn i fundamentalmatrisen $\Phi$ uppfyller systemet $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ medför att även fundamentalmatrisen uppfyller systemet, dvs $\Phi'=\mathbf{A}\Phi$.
Matrisen $\mathbf{A}$ bestäms genom att multiplicera ekvationen $\Phi'=\mathbf{A}\Phi$ från höger med inversen till $\Phi$.
Denna invers existerar ty determinanten för en fundamentalmatris är alltid skild från noll på grund av att lösningarna är linjärt oberoende.
Efter multiplikationen får vi $\Phi'\Phi^{-1}=\mathbf{A}\Phi\Phi^{-1}$ eller $\mathbf{A}=\Phi'\Phi^{-1}$.
c) Bestäm inversen till fundamentalmatrisen.

Den är $\Phi^{-1}=\frac{1}{5e^{3t}}\begin{pmatrix} 2e^{4t} & -3e^{4t} \\ e^{-t} & e^{-t}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{t} & -3e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t}\end{pmatrix}$

och derivatan av fundamentalmatrisen är $\Phi'=\begin{pmatrix} -e^{-t} & 12e^{4t} \\ e^{-t} & 8e^{4t}\end{pmatrix}$.

Då erhålles den konstanta matrisen

$$\mathbf{A}=\Phi'\Phi^{-1}=\begin{pmatrix} -e^{-t} & 12e^{4t} \\ e^{-t} & 8e^{4t}\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{t} & -3e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

SVAR: a) Se ovan
b) $\mathbf{A}=\Phi'\Phi^{-1}$
c)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$$