KTH Matematik

Tentamensskrivning i Diff & Trans I, 5B1200(5B1220).
Lördagen den 14 januari 2006, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Fordringar: 3: 16-23; 4: 24-30p; 5: 31-35p.
Uppgifterna: 1-3, 6 ger 3 poäng vardera, 4, 7 ger 4 poäng vardera 5, 8-9 ger 5 poäng vardera.

1. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $y' = y(2-y)(4-y)$.

2. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = \delta(t - \frac{\pi}{2})$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, där $\delta(t - \frac{\pi}{2})$ är Diracs deltafunktion.

4. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2 y'' + axy' + by = 0$ ges av $y_1 = x$ och $y_2 = x^2$.
Vidare finns det en motsvarande inhomogen differentialekvation med partikulärlösningen $y_p = x \ln x$.
Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

5. En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$. Bestäm eventuella stationära punkter.
Klassificera med avseende på stabilitet och typ. Bestäm systemets allmänna lösning.
Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

6. Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalen till en godtycklig punkt (x, y) på kurvan skär x-axeln i punkten $(x+1, 0)$?

7. Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = |\ x\ | + x$, $-1 < x < 1$.
Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = 1$.

8. Låt $u(x,t)$ vara temperaturen i en smal stav med längden L Vidare gäller att $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < L$, $t > 0$, h är en konstant. Bestäm temperaturen $u(x,t)$ då begynnelsetemperaturen är $f(x)$ och stavens ändpunkter är isolerade.
Bestäm därefter temperaturen då $L = \pi$ och $f(x) = 2 + \cos 3x$.

9. a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.